

第五册

大青花鱼

目录

第一章 圆	5
1.1 圆的基本性质	5
1.2 圆和旋转	7
1.3 圆心角和圆周角	8
1.4 点到圆的势	11
1.5 切线	13
 第二章 圆和多边形	 15
2.1 三角形的外接圆和内切圆	15
2.2 圆内接四边形	16
2.3 垂心组和外接圆	20
2.4 九点圆	23
2.5 圆内接多边形	25
2.6 弧长与面积*	27

第三章 三角函数	33
3.1 正弦函数	33
3.2 正弦定理	37
3.3 余弦函数	40
3.4 余弦定理	42
3.5 和差角公式	45
3.6 正切函数和余切函数	52
3.7 多边形的边角关系	55
 第四章 从或许到确定	 57
4.1 事件和见知	57
4.2 概率和分布	60
4.3 二项分布和均匀分布	62
4.4 排列和组合	64
 第五章 多元命题与多元映射	 71
5.1 映射与多元映射	72
5.2 二元命题	76
5.3 “有求必允”与“一路全真”	79
5.4 多元命题*	85

第一章 圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

1.1 圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点 O 距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段 XY ，到 O 的距离和 AB 等长的点构成一个圆。 O 叫做**圆心**， XY 叫做圆的**半径**，长度一般记为 r 。不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为 O 、半径为 r 的圆，一般记为圆 (O, r) 或 $\odot(O, r)$ 。圆心 O 和另一点 P 确定的圆，一般记为圆 (O, P) 或 $\odot(O, P)$ 。如果不在意半径，在不至于混淆的情况下，也可以简记为圆 O 。

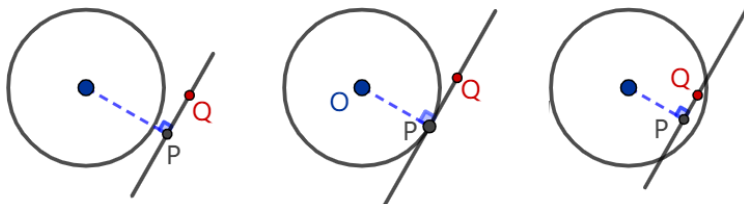
平面上的点到 O 的距离小于 r ，就说它在圆内；如果等于 r ，就说它在圆上；如果大于 r ，就说它在圆外。

和引进直线等概念时一样，圆也有一条公理，规定它和直线的关系。

公理. 直线交圆公理 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

从这个公理出发，我们可以整理直线和圆的位置关系。

考虑直线 l 和圆 $\odot(O, r)$ 。过 O 作直线 $m \perp l$ ，记垂足为 P ， $|OP| = d$ 。



1. 如果 $d > r$ ，那么 P 在圆外。根据垂距定理， l 上任意点都在圆外。我们说直线 l 与圆 O **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么 P 在圆外，因此 $d > r$ 。
2. 如果 $d = r$ ，那么 P 在圆上。根据垂距定理， l 上的点除了 P 都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线 l 与圆 O **相切**，称 P 为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点 Q ，那么 $|OQ| = r$ 。 l 上其他点都在圆外，所以根据垂距定理的逆定理， $OQ \perp l$ ， $d = r$ 。
3. 如果 $d < r$ ，那么 P 在圆内。根据直线交圆公理，直线和圆有两个交点 A 、 B 。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于 A 、 B 。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据直线交圆公理，直线有部分在圆内，这部分上的点到圆心距离小于 r ，因此根据垂距定理， $d < r$ 。

设直线割圆于两点 A 、 B ，我们说直线是圆的**割线**。根据直线交圆公理，线段 AB （除端点）在圆内。我们把线段 AB 称为圆的一条**弦**。如果 AB 过圆心 O ，就说它是圆的直径， A 、 B 互为**对径点**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

考虑圆 O 上的弦 AB 的垂直平分线 m ，圆心 O 显然在 m 上。 $m \perp AB$ ，设垂足为 P ，那么 $|AP| = |PB|$ 。设 m 和圆交于两点 C 、 D ，则弦 CD 就是直径。所以我们说：**恰有一条直径平分每条弦**。

习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点 A 、 B ，证明线段 AB （除端点）在圆内。
2. 证明：同一个圆中，直径是最长的弦。

1.2 圆和旋转

怎么画一个圆？我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角 AOB ，可以这样定义**旋转**：

定义 1.2.1. 给定角 AOB ，平面中一点 P 关于 $\angle AOB$ 旋转的结果，是唯一使得 $\angle POQ = \angle AOB$ 且 $|OP| = |OQ|$ 的点 Q 。

O 称为旋转的**中心**。任何点 P 绕中心旋转，结果都在圆 (O, P) 上。

可以看到，给定一个圆 (O, P) ，从点 P 出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是 0° 到 360° ）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为 $\gamma_{(O,P)}$ 。

通过 $\gamma_{(O,P)}$ ，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然 $[0, 360)$ 对应整个圆，那么 $[0, 180]$ 就对应半个圆， $[0, 60]$ 就对应六分之一圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应 $[a_1, a_1 + x]$ 和 $[a_2, a_2 + x]$ ，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全

等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如 $[0, 60]$ 对应的圆弧，起点就是 P ，终点是 60 度角 POQ 的终边和圆的交点 Q 。如果圆弧对应的区间长度超过 180 ，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180 ，就说它是**劣弧**；如果等于 180 ，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。我们说它们互为**补弧**。

同一个圆上，明确了起点 A 和终点 B ，就唯一确定了圆弧 $\widehat{AB}$ 。如果只说了两点 A 、 B ，那么 $\widehat{AB}$ 一般指劣弧或起点为 A 终点为 B 的圆弧。

习题 1.2.1. 证明：

1. 任意线段经过旋转得到等长的线段。
2. 任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为 A ，终点为 B 的圆弧 $\widehat{AB}$ 和圆上弧外一点 P ，则角 APB 称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢？如右图，连接 PO ，延长交圆于对径点 Q 。由于 $\triangle AOP$ 是等腰三角形， $\angle OAP + \angle OPA = 0$ ，

同理, $\angle OBP + \angle OPB = 0$ 。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说, 圆心角是圆周角的两倍大小, 圆周角是圆心角的一半大小。

定理 1.3.1. 圆周角定理 给定圆 O 上的弧 $\widehat{AB}$ 及圆上弧外的点 P , 如果 $P \notin \widehat{AB}$, 那么:

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果点 P 在弧上, $\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 是什么关系呢? 这时 $\angle APB$ 对应 $\widehat{AB}$ 的补弧, 于是它是 $\widehat{AB}$ 对应的圆心角的一半大小。 $\widehat{AB}$ 对应的圆心角是周角减去 $\angle AOB$, 所以

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角, 因此, 根据圆周角定理, 对径点对应的圆周角是直角。或者说, 半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是, 讨论圆心角时, 我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时, 为了方便, 我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里, 圆上的点 A 、 B 对应的圆心角 $\angle AOB$ 和点 C 、 D 对应的圆心角 $\angle COD$ 相等, 那么根据“边角边”, 圆心 O 和它们构成的三角形满足: $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。弦 AB 和 CD 也等长。不仅如此, 根据圆映射, 圆弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 也等长。事实上, $\widehat{CD}$ 就是 $\widehat{AB}$ 关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之, 如果两个圆弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 等长, 那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等, 那么弦 AB 和 CD

也等长。更进一步, 设 P 是圆上不属于两弧的点, 那么圆周角 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来, 如果圆 O 上两条弦 AB 和 CD 等长, 那么根据“边边边”, $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。于是圆心角相等, 所以劣弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说, 在同一个圆里, 两点对应的弦长相等当且仅当对应的(劣弧)弧长相等, 当且仅当对应的圆心角相等, 当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角, 都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点 A 、 B , 它们对应的垂直平分线 l 平分 $\angle AOB$, 即把 $\angle AOB$ 分成两个相同大小的圆心角。因此, 设 l 和圆交于 P 、 Q , 则它们也分别平分所在的圆弧(称为弧的中点)。我们把这一系列结论总称为垂径定理:

定理 1.3.2. 垂径定理 给定圆上两点, 则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦, 同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成: 过圆 O 的弦 AB 中点的直径与弦 AB 垂直, 同时平分 $\angle AOB$ 和弧 $\widehat{AB}$ 。

给定圆 (O, r) , 弦 AB 中点记为 M , $|MO|$ 称为弦 AB 的弦心距。由于 $MO \perp AB$, $\triangle OAM$ 是直角三角形, 根据勾股定理,

$$|OM|^2 + |AM|^2 = |OA|^2 = r^2.$$

设直线 MO 与圆 O 交于 P 、 Q 两点, 则

$$|MP| \cdot |MQ| = (r - |OM|)(r + |OM|) = r^2 - |OM|^2.$$

比较以上两式, 可以得到:

$$|MA| \cdot |MB| = |MA|^2 = |MB|^2 = |MP| \cdot |MQ|.$$

这个推论也常常被称为垂径定理。

1.4 点到圆的势

圆是到定点距离相同的点的集合，所以点对圆来说是关键的概念。一点和圆的关系，可以用它到圆的距离来理解。点 P 在圆 (O, r) 上，当且仅当它到圆心的距离为 r 。

如果不知道圆心的位置，有没有办法理解点和圆的位置关系呢？我们引进点到圆的**势**的概念。

定义 1.4.1. 点 P 到圆 (O, r) 的势，等于 $|OP|^2 - r^2$ 。

乍一看，点到圆的势，仍然和它到圆心的距离相关。点到圆心的距离 d 比 r 小的时候，点在圆内，这时它到圆的势小于 0。 $d > r$ 的时候，点在圆外，势也大于 0。 $d = r$ 的时候，点在圆上，势等于 0。

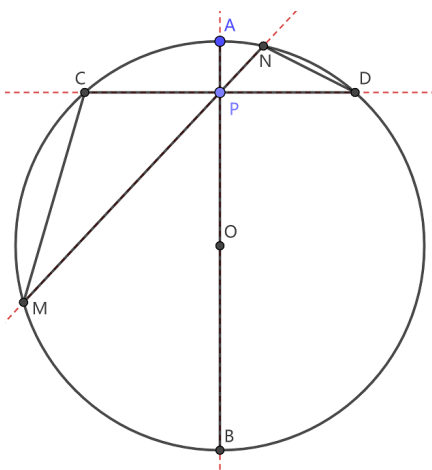
下面，我们从垂径定理出发，给出一种不依赖圆心的方法，计算点到圆的势。

首先设点 P 在圆 (O, r) 内。连接 OP ，延长为直径，交圆于 A, B 两点（ A, P 在 O 同侧）。过 P 作该直径的垂线，交圆于 C, D 两点。弦 CD 的垂直平分线过 O ，而 $OP \perp CD$ ，所以 OP 就是弦 CD 的垂直平分线。根据垂径定理， $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = r^2 - |OP|^2$ 。这说明 $|PA| \cdot |PB|$ 、 $|PC| \cdot |PD|$ 是 P 的势的绝对值。

过 P 任意作一条直线，和圆交于两点 M, N ，是否也有这个结论呢？

如右图，可以发现， $\angle NDC$ 和 $\angle NMC$ 都对应同一段弧，且 C, M 都在弧外，所以 $\angle NDC = \angle NMC$ 。又对顶角 $\angle DPN = \angle CPM$ ，所以 $\triangle DPN \sim \triangle MPC$ 。也就是说，

$$\frac{|PD|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PC|}.$$



换句话说, $|PC| \cdot |PD| = |PN| \cdot |PM|$ 。这个结论也叫**相交弦定理**。

对圆内一点 P 来说, 即便不知道圆心, 只要过 P 作直线与圆交于两点, 那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势的绝对值。

如果点在圆外, 是否有类似的结论呢? 我们仍然连接 OP , 直线 OP 割圆于两点: A, B (A 位于 O, P 之间)。可以算出:

$$|PA| \cdot |PB| = (|PO| - |AO|) \cdot (|PO| + |PB|) = |OP|^2 - r^2.$$

过 P 作直线 l 和圆交于两点 M, N , $|PM| \cdot |PN|$ 是否也等于 $|OP|^2 - r^2$ 呢?

如右图, 注意到 $\angle BNA$ 和 $\angle BMA$ 都对应半圆, 所以都是直角。三角形外角 $\angle PAN = \angle ABN + \angle BNA$, 而 $\angle ABN$ 和 $\angle AMN$ 对应同一段弧且都不在弧上, 所以 $\angle ABN = \angle AMN$ 。于是,

$$\begin{aligned} \angle PAN &= \angle ABN + 90^\circ \\ &= \angle AMN + \angle BMA = \angle BMN. \end{aligned}$$

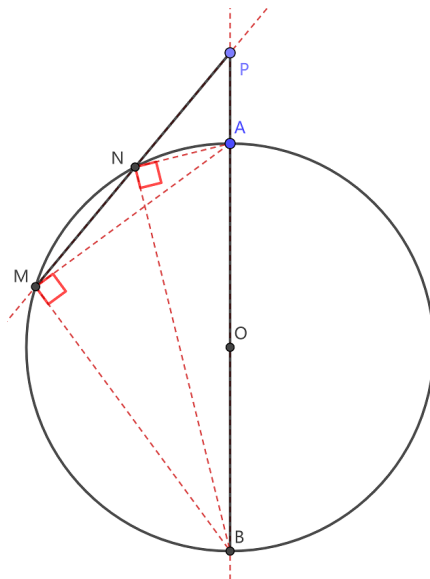
这说明 $\triangle PAN \sim \triangle PBM$, 所以

$$\frac{|PA|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PB|},$$

换句话说, $|PM| \cdot |PN| = |PA| \cdot |PB|$ 。这个性质也叫**割线定理**。

对圆外一点 P , 即便不知道圆心, 只要过 P 作直线与圆交于两点, 那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势。

因此, 无论在圆内还是圆外, 经过一点 P 的直线与圆交于两点, 则它到两点的距离乘积只与它和圆的远近关系有关。如果 P 在圆内, 这个乘积等于 $r^2 - |PO|^2$; 如果 P 在圆外, 这个乘积等于 $|PO|^2 - r^2$ 。或者说, 这个乘积就是势的绝对值。至于 P 在圆上的情形, 我们可以认为它与圆交于



两点，其中一点就是它自身，所以到自身距离为 0，从而乘积总是 0，等于它的势。

定理 1.4.1. 圆势定理 过点 P 作直线与圆 (O, r) 交于两点： A 、 B ，那么

$$|PA| \cdot |PB| = ||PO|^2 - r^2|.$$

比起乘积 $|PA| \cdot |PB|$ ，点到圆的势多了正负号。如何理解这个正负号呢？如果过圆 (O, r) 的圆心作一条直线，在上面建立数轴。当我们把原点 P 选在圆内的时候， A 和 B 就对应符号相异的数；如果把原点 P 设在圆外， A 和 B 就代表同号的数了。所以，以 P 为原点， PO 为正方向的数轴和圆交于两点，这两点代表的数的乘积就是 P 到圆的势。或者说，圆势附带了 P 和 A 、 B 的位置关系的信息。

1.5 切线

过一点作直线要与圆交于两点不难，与圆交于一点则不简单。根据直线交圆公理，过圆内的点，无法作和圆相切的直线。过圆外一点，可以与圆相切的直线直观上，我们可以把直尺从和圆相交的状态逐渐移动，直到尺子碰到圆的“边缘”，作出大致和圆相切的直线。

直线和圆相切是一种特殊的状况。过圆外或圆上一点的直线 l 如果和圆 O 相切，就说它是点到圆的**切线**。切线和圆的（唯一）交点，称为**切点**。根据相切的性质，过圆心 O 作关于 l 的垂线，切点就是垂足。过圆上一点，只有一条切线，过圆外一点，可以作两条切线。

过圆 (O, r) 外一点 P 作切线，记切点为 Q ，则 $\triangle OQP$ 为直角三角形。根据勾股定理，

$$|PQ|^2 + |OQ|^2 = |OP|^2.$$

因此， $|PQ|^2 = |OP|^2 - r^2$ 。也就是说，点 P 到切点的距离平方，是它关于

圆的势。若过 P 作圆 O 的割线，交圆于 A 、 B 两点，那么

$$|PA| \cdot |PB| = |OP|^2 - r^2 = |PQ|^2.$$

也就是说，

$$\frac{|PA|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|PB|}.$$

因此， $\triangle PAQ \sim \triangle PQB$ 。这两个三角形的相似关系称为**切割线定理**。切割线定理可以看作割线定理的特例。

从切割线定理可以推出： $\angle PQA = \angle PBQ$ 。从另一个角度，可以这样理解：过圆上一点 Q 只有一条切线 PQ 。如果过 Q 再作一条直线，直线于圆必交于另一点 A ，而 $\angle PQA$ 等于圆弧 $\widehat{QA}$ 对应的圆周角。

思考 1.5.1. 已知圆外一点 P ，如何准确作出 P 到 O 的切线？

第二章 圆和多边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。

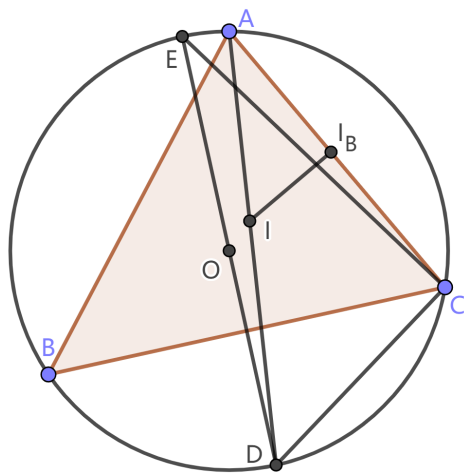
2.1 三角形的外接圆和内切圆

首先来看三个点的情形。

设 A 、 B 、 C 是圆 (O, r) 上（相异的）三点，则线段 AB 、 BC 、 AC 的垂直平分线都过圆心 O 。因此， O 是 $\triangle ABC$ 的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线）， $|OA| = |OB| = |OC| = r$ 。反之，设有（非退化的） $\triangle ABC$ ，以它的外心 O 为圆心，以 $|OA|$ 为半径，就可以画出一个圆，过顶点 A 、 B 、 C 。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（“外心”即“外接圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

三角形不仅可以内接于圆，圆也可以内接于三角形。考虑三角形 ABC 的内心，它到三角形三边的距离相等。以内心为圆心，以它到三边的距离为半径作圆，这个圆和三角形三边都相切。我们把这个圆叫做三角形的**内切圆**（“内心”即“内切圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**外切三角形**。

除了内心，三角形还有旁心。旁心到三角形三边的距离也相等。因此，以每个旁心为圆心，以它到三遍的距离为圆心，各可以得到一个圆。每个圆都与三角形一边和另两边的延长线相切。这三个圆称为三角形的旁切圆（“旁心”即“旁切圆圆心”的简称），把三角形称为它们的旁切三角形。



习题 2.1.1.

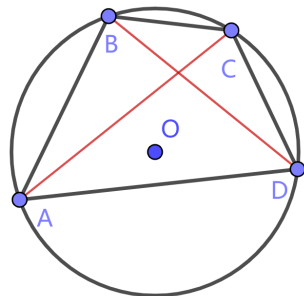
如右上图， $\triangle ABC$ 的内心为 I ，外心为 O 。设 I 到 AC 的垂足为 I_B ，射线 AI 与圆 O 交于 D ， D 的对径点为 E 。

1. 证明： $\triangle CDI$ 是等腰三角形， $|CD| = |DI|$ 。
2. 证明： $\triangle CDE \sim \triangle I_BIA$ 。
3. 证明： I 关于圆 O 的势 $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$ 。其中 R 是外接圆半径， r 是内切圆半径。
4. 设 J_A, J_B, J_C 是 $\triangle ABC$ 的旁心，证明：它们关于圆 O 的势分别等于外接圆半径与对应旁切圆半径乘积的两倍。

2.2 圆内接四边形

在三个点的基础上再加一个点 D ，四个点 A, B, C, D 能否恰好对应一个圆呢？显然， $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

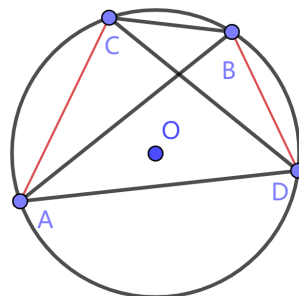
如右图，设 A, B, C, D 圆 (O, r) 上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现， $\widehat{ABC}$ 和 $\widehat{CDA}$ 是整个圆的分划，因此，它们对应的圆心角之和是



周角。根据圆周角定理, $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ 。同理, $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$ 。

我们还可以发现, 圆周角 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都对应 $\widehat{BC}$, 因此根据“等弧对等角”, $\angle BAC = \angle BDC$ 。同理可得: $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle DBA = \angle DCA$ 。

如果 A 、 B 、 C 、 D 顺序改变, 如右图, 那么四边形 $ABCD$ 就是蝶形。 $\widehat{ABC}$ 和 $\widehat{CDA}$ 对应同一段圆弧 $\widehat{AC}$ 。这时 $\angle ABC + \angle CDA = 0^\circ$, 或者说 $\angle ABC = \angle ADC$ 。同理, $\angle BAD = \angle BCD$ 。



综合两种情况, 圆内接四边形对角要么和为平角, 要么相等。

可以看到, 如果把相交的对边 AB 、 CD 看作对角线, 把对角线 AC 、 BD 看作对边, 我们就得到一个凸四边形 $ACBD$ 。因此, 观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现, 我们仍然有 $\angle BAC = \angle BDC$ 、 $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle DBA = \angle DCA$ 。如果对角线 AC 和 BD 交于点 P , 仍然有 $\triangle APB \sim \triangle CPD$ 、 $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ 。换句话说, 即便圆内接四边形不是凸四边形, 用它的顶点也能画出圆内接凸四边形, 并且不妨碍我们讨论相关的性质。所以, 我们总把圆内接四边形问题归结为凸四边形来讨论, 也称之为四点共圆问题。

以上是圆内接四边形边和角的性质, 反过来, 满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢? 或者说, 满足什么条件的四个点共圆呢?

定理 2.2.1. 如果凸四边形 $ABCD$ 中的一对内角 $\angle ABC$ 与 $\angle CDA$ 的和是平角, 那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明: $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$, 所以要么两个角都是直角, 要么一个是钝角, 一个是锐角。

如果两个角都是直角, 作对角线 AC , 取它的中点 O 。 $\triangle ABC$ 是直角三角

形, AC 是斜边, 根据直角三角形的中线定理, $|AO| = |BO| = |CO|$ 。同理, $\triangle CDA$ 是直角三角形, AC 是斜边, 于是 $|AO| = |DO| = |CO|$ 。因此 A, B, C, D 四点都在 $\odot(O, A)$ 上。

如果两个角一个是钝角, 一个是锐角。不妨设 $\angle ABC > 90^\circ > \angle CDA$ 。作对角线 AC , 则 B, D 在 AC 两侧。作对角线 AC 的垂直平分线 l 。显然, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的外心都在 l 上, 只需证明两者是同一点。

设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot(O_1, B)$ 。 $\angle ABC$ 是钝角, 因此它的圆心角对应优弧。于是, O_1 和 B 在直线 AC 两侧。 $\angle CO_1A = 360^\circ - 2\angle ABC$ 。

另一方面, 设 $\triangle CDA$ 的外接圆为 $\odot(O_2, D)$ 。 $\angle CDA$ 是锐角, 因此它的圆心角对应劣弧。于是, O_2 和 D 在直线 AC 同一侧。 $\angle CO_2A = 2\angle CDA$ 。

以上两个结论说明, O_1 和 O_2 都和 D 在直线 AC 同一侧, 且 $\angle CO_1A = \angle CO_2A$ 。而 $\triangle CO_1A$ 和 $\triangle CO_2A$ 都是等腰三角形, 所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。 A, B, C, D 四点都在 $\odot(O_1, A)$ 上。 $\square$

从这个定理可以推出, 矩形、等腰梯形和正方形都是圆内接四边形。

定理 2.2.2. 如果凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle ACB = \angle ADB$, 那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明: $ABCD$ 是凸四边形, 所以 C 和 D 在直线 AB 同侧。作边 AB 的垂直平分线 l , 显然, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的外心都在 l 上, 只需证明它们是同一点。

设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot(O_1, C)$, $\triangle ABD$ 的外接圆为 $\odot(O_2, D)$ 。如果 $\angle ACB$ 是钝角, 那么它的圆心角对应优弧。于是, O_1 和 C 在直线 AB 两侧, 且 $\angle BO_1A = 360^\circ - 2\angle ACB$ 。这时, $\angle ADB = \angle ACB$ 也是钝角, 所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 两侧, 且 $\angle BO_2A = 360^\circ - 2\angle ADB$ 。如果 $\angle ACB$ 是锐角, 那么它的圆心角对应劣弧。于是, O_1 和 C 在直线 AB 同侧, 且 $\angle BO_1A = 2\angle ACB$ 。这时, $\angle ADB = \angle ACB$ 也是锐角, 所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 同侧, 且 $\angle BO_2A = 2\angle ADB$ 。

因此, O_1 和 O_2 总在直线 AB 同侧, 且 $\angle BO_1A = \angle BO_2A$ 。而 $\triangle BO_1A$ 和

$\triangle BO_2A$ 都是等腰三角形, 所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。
 A, B, C, D 四点都在 $\odot(O_1, A)$ 上。 $\square$

定理 2.2.3. 过一点 P 的两条直线 m, n 上各有两点: $A, C \in m$ 和 $B, D \in n$, 分别各在 P 两侧。如果

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$

那么四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明: 考虑 $\triangle APB$ 和 $\triangle DPC$ 。对顶角 $\angle APB = \angle DPC$ 。而 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 等于说

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

因此根据“边角边”, $\triangle APB \sim \triangle DPC$ 。于是有 $\angle ABP = \angle DCP$, $\angle BAP = \angle CDP$ 。因此, 根据定理 2.2.2, 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。 $\square$ 这个定理也可以理解为: 两条线段相交, 如果交点把每条线段分成的两部分长度之积相等, 那么线段端点共圆。也就是说, 这两条线段实际上是圆的两条相交的弦, 乘积 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 是 P 关于圆的势。这个定理是相交弦定理的逆定理。

习题 2.2.1.

1. $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 上分别有点 X, Y, Z 。设 $\triangle AYZ$ 的外接圆和 $\triangle BXZ$ 的外接圆交于点 P , 证明: C, X, Y, P 四点共圆。

2. 直线 XYZ 与三角形 ABC 的边 BC, CA, AB 所在直线分别交于点 X, Y, Z 。证明: $\triangle AYZ$ 、 $\triangle BXZ$ 、 $\triangle CXY$ 、 $\triangle ABC$ 的外接圆过一公共点。

3. P 是平面上一点。过 P 作直线 l_1, l_2, l_3 与 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 分别交于点 X, Y, Z 。如果 $\angle AYP = \angle BZP = \angle CXP$, 证明: A, Y, Z, P 四点共圆、 B, X, Z, P 四点共圆、 C, X, Y, P 四点共圆。

给定圆内接凸四边形 $ABCD$ 。 E 是对角线 AC 上一点。 $\angle CDE = \angle BDA$ 。

4. 证明: $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。

5. 证明: $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。

6. 证明: $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

给定凸四边形 $ABCD$, 作射线 CE 使得 $\angle ECD = \angle ABD$, 作射线 DE 使得 $\angle CDE = \angle BDA$ 。两射线交于点 E 。

7. 证明: $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。

8. 证明: $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。

9. 证明: $|AC| \cdot |BD| \geq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

10. 证明, 凸四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形, 当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

11. 证明: A, B, C, D 四点共圆, 当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

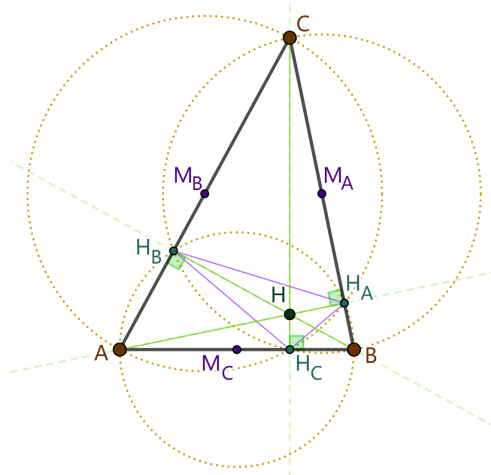
2.3 垂心组和外接圆

考虑锐角三角形 ABC , 把顶点到对边的垂足分别记作 H_A, H_B, H_C , 垂心为 H 。由于 $\angle HH_A B = \angle BH_C H = 90^\circ$, 两角之和为平角, 故 H, H_A, H_C, B 四点共圆, $\angle H_C H H_A + \angle H_A B H_C = 180^\circ$ 。这说明 $\angle CHA = \angle H_C H H_A$ 是钝角, $\triangle AHC$ 是钝角三角形。

考察钝角三角形 AHC , 它的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C , 而垂心是 B 。

类似地, 我们可以证明 H, H_B, H_C, A 四点共圆, H, H_A, H_B, C 四点共圆。钝角三角形 BHC 、 CHA 的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C , 而垂心分别是 A 和 B 。

于是, 从锐角三角形 ABC 及其垂心 H 出发, 可以得出四个三角形,



每三个点构成的三角形的垂心，是四个点中剩余的那个点。我们把这样的四点称为**垂心组**。

从钝角三角形及其垂心出发，一样可以得到一个垂心组。从直角三角形出发，其垂心和直角顶点重合，四点的垂心组退化为三点。

从上面的讨论可知，垂心组四点共享三个垂足。任一顶点、垂心和另外两个顶点对应的垂足四点共圆。

考察 A, H_B, H_A, B 四点。由 $\angle AH_B B = 90^\circ = \angle AH_A B$ 可知, A, H_B, H_A, B 四点共圆。由于 $\angle AH_B B$ 是直角, A, H_B, H_A, B 四点所在的圆, 圆心是边 AB 的中点 M_C 。同理, A, H_C, H_A, C 四点共圆, 圆心是边 AC 的中点 M_B ; B, H_C, H_B, C 四点共圆, 圆心是边 BC 的中点 M_A 。

从 A, H_B, H_A, B 四点共圆可以推出: $\angle A = \angle CH_A H_B, \angle B = \angle H_A H_B C$ 。也就是说, $\triangle CH_B H_A \sim \triangle CBA$ 。

从以上两个四点共圆性质还可以推出 $\angle HH_C H_A = \angle CAH, \angle HH_A H_C = \angle ACH$ 。因此, $\triangle HH_A H_C \sim \triangle HCA$ 。

以上是三角形垂心组的基本性质。垂心是顶点到对边垂线的交点。另外一个和边垂直的概念是边的中垂线。如果把三角形的垂心和外心一起来看, 会发现两者有密切的关联。

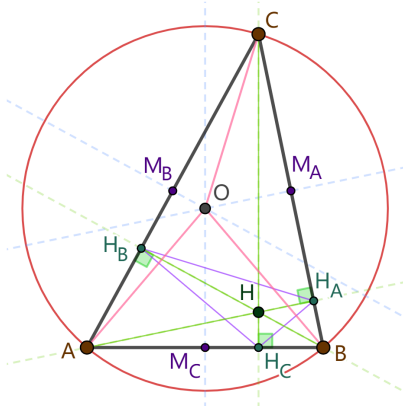
考虑锐角三角形 ABC 、其垂心 H 及其外心 O 。边 BC 可以看作 $\triangle ABC$ 外接圆的弦。圆心角 $\angle BOC = 2\angle A$, 因此在等腰三角形 BOC 中,

$$\angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A = \angle HBA.$$

同理, $\angle BAO = \angle HAC, \angle ACO = \angle HCB$ 。

此外, $\angle H_C H_A B = \angle A$, 因此 $\angle H_C H_A B + \angle CBO = 90^\circ$ 。这说明半径 $OB \perp H_A H_C$ 。同理, 半径 $OA \perp H_B H_C, OC \perp H_A H_B$ 。

作点 A 在 ABC 外接圆上的对径点 A' ,



AA' 是直径, 所以 $\angle ACA'$ 是直角。因此

$$\angle H_C HA' = 90^\circ - \angle ACH_C = \angle A.$$

另一方面, A, H_B, H, H_C 四点共圆, 所以

$$\angle H_C HB = 180^\circ - \angle H_B HH_C = \angle A.$$

这说明 $CA' \parallel HB$ 。同理, 我们可以得到 $BA' \parallel HC$ 。因此四边形 $A'BCH$ 是平行四边形。

作 B, C 的对径点 B', C' , 同样可以证明, 四边形 $AB'HC$ 和 $AHBC'$ 是平行四边形。

连接圆心 O 和 AB 中点 M_C , O 是直径 AA' 的中点, 所以 OM_C 平行于 $A'B$, 且长度为 $A'B$ 一半。我们把这种关系简称为“ OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半”。

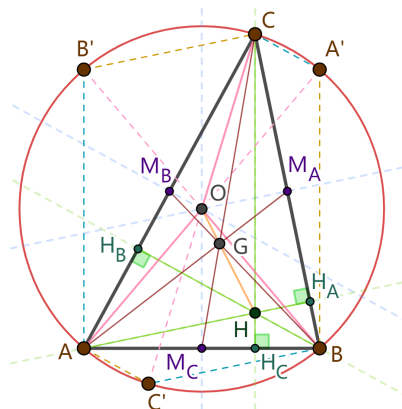
连接 OH 和 AM_C 。由于 OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半, $A'B$ 平行且等于 HC , 因此 OM_C 平行且等于 HC 的一半。记 OH 和 CM_C 交点为 G , 不难看出, $\triangle OGM_C \sim \triangle GHC$, 且

$$\frac{|M_C G|}{|GC|} = \frac{|OG|}{|GH|} = \frac{|OM_C|}{|HC|} = \frac{1}{2}.$$

也就是说, 点 G 在三角形 ABC 中线 CM_C 上, 且到 C 点的距离是到 M_C 距离的两倍。这说明 G 就是三角形 ABC 的重心。我们发现, 三角形的垂心、外心和重心满足以下的性质:

定理 2.3.1. 三心共线定理

三角形 ABC 的垂心、外心和重心共线, 重心位于外心和垂心为端点的线段上, 而且重心到垂心的距离是重心到外心距离的两倍。



习题 2.3.1. 沿用本节记号, 证明:

$$1. |AH| \cdot |HH_A| = |BH| \cdot |HH_B| = |CH| \cdot |HH_C|.$$

2. H 是 $\triangle H_A H_B H_C$ 的内心。

3. 记 $\triangle ABC$ 的内心为 I , 旁心分别为 J_A, J_B, J_C , 则 I 是 $\triangle J_A J_B J_C$ 的垂心。

4. H 关于 AB 的对称点 H^C 在 ABC 外接圆上, 且 $\widehat{AC'} = \widehat{H^C B}$ 。

5. $\triangle AHB$ 、 $\triangle AHC$ 和 $\triangle CHB$ 的外接圆都和 $\triangle ABC$ 的外接圆一样大。它们的圆心分别是 $\triangle ABC$ 的外心 O 关于三边的对称点, 和 O 组成垂心组。并且这个垂心组和垂心组 A, B, C, H 全等。

2.4 九点圆

我们已经了解过三角形的外接圆、内切圆和旁切圆。本节我们再介绍三角形内部的一个特殊的圆。

设有三角形 ABC , 上一节中, 我们证明了 $\triangle ABC$ 的垂心 H 、外心 O 和重心 G 共线。考虑线段 OH , 作它的中点 M 。我们知道 $AHBC'$ 是平行四边形, 所以 M_C 是其对角线 HC' 的中点。因此, MM_C 平行且等于 OC' 的一半。

作 CH 的中点 D_C , 由于 OM_C 平行且等于 CH 的一半, 因此平行且等于 HD_C 。也就是说, 四边形 $HD_C OM_C$ 是平行四边形, 于是 M_C, M, D_C 共线, M 是 $M_C D_C$ 的中点, $|MD_C| = |MM_C| = \frac{1}{2}|M_C D_C|$ 。

$\triangle M_C H_C D_C$ 是直角三角形, 所以斜边中点 M 到直角顶点 H_C 的距离是斜边长度 $M_C D_C$ 的一半。也就是说,

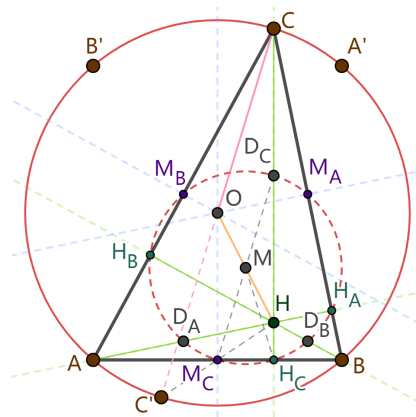
$$|MD_C| = |MM_C| = |MH_C| = \frac{1}{2}|OC'| = \frac{R}{2}.$$

其中 R 是 ABC 的外接圆半径。

同理，我们也有

$$\begin{aligned} |MD_A| &= |MM_A| = |MH_A| = \frac{R}{2}, \\ |MD_B| &= |MM_B| = |MH_B| = \frac{R}{2} \end{aligned}$$

所以，以 M 为圆心，以 $\frac{R}{2}$ 为半径画圆，我们就会发现，这个圆经过三边中点，三边上的垂足，以及三顶点到垂心连线的中点，合共九点。我们把这个圆称为**九点圆**。



定理 2.4.1. 九点圆定理

三角形三边中点、三边垂足，以及三顶点到垂心连线的中点共圆。圆心为外心与垂心的中点，半径为三角形外接圆半径的一半。

三角形的九点圆的大小，刚好是三角形外接圆的一半。如果我们把三角形的垂心 H 看作“起点”，那么三角形的外接圆可以看作是九点圆外延加倍得到的。比如，把线段 HD_C 加倍延长，就得到 HC ；把线段 HM_C 加倍延长，就得到 HC' ；把线段 HH_C 加倍延长，就得到外接圆上一点 H^C 。一般来说，从 H 出发，连接 H 和九点圆上任一点，加倍延长后，终点就会落在外接圆上。

习题 2.4.1. 沿用本节记号，证明：

1. 作外心 O 关于三边的对称点： O_A, O_B, O_C ，则垂心 H 是 $\triangle O_A O_B O_C$ 的外心。
2. $\triangle O_A O_B O_C \simeq \triangle ABC$ 。两者关于点 M 对称，有共同的九点圆。
3. 记 $\triangle ABC$ 的旁心为 J_A, J_B, J_C ，则 $\triangle J_A J_B J_C$ 的九点圆是 $\triangle ABC$ 的外接圆。

2.5 圆内接多边形

九点圆涉及了内接于同一个圆的九边形。对一般的多边形来说，成为圆内接多边形意味着什么呢？

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点 A 、 B 、 C 、 D 按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形 $ABCD$ 是凸四边形，否则，四边形 $ABCD$ 可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类：顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说，设圆 O 上有 n 个点： $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，从 A_1 出发构造圆映射 $\gamma_{(O, A_1)}$ ，把 $[0, 360)$ 映射到圆周，那么 0 对应 A_1 。设 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 分别对应 n 个点，那么 $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 。这样定义的圆内接多边形： $A_1 A_2 \dots A_n$ 就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数 n ，凸 n 边形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是 n 边形的边，和其余 $n-3$ 个顶点的连线是对角线。因此每个点是 $n-3$ 条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢？我们知道三角形的内角和是平角，凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角）。边数继续增多时，我们定义凸 n 边形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 的内角和为：

$$\angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 A_4 + \dots + \angle A_{n-2} A_{n-1} A_n + \angle A_{n-1} A_n A_1 + \angle A_n A_1 A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形, 我们可以这样证明: n 个顶点把圆分为 n 段圆弧。每个顶点张成的内角, 对应了其中 $n-2$ 段圆弧。如果考虑所有 n 个内角对应的圆弧, 则每段圆弧计入 $n-2$ 次 (圆弧两端是内角顶点的时候不计入, 其它情况下都计入)。也就是说, n 个内角和对应 $n-2$ 个整圆。这些内角都是圆周角, 因此它们的和是 $n-2$ 个整圆对应的圆周角, 即 $n-2$ 个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况, 我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得, 凸四边形可以裁成两个三角形, 因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看, 我们通过裁掉一个三角形, 把凸四边形变成了三角形。对一般的凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 来说, 由于它的每个内角都介于零角和平角之间, 我们可以考虑裁掉某个角, 把它变成 $n-1$ 边形。比如, 沿着线段 A_1A_3 剪一刀, 就把 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成了三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$ 。

定理 2.5.1. 凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

证明: 用归纳法证明。命题 $P(n)$: 凸 $n+2$ 边形的内角和是 n 个平角。我们要证明 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。

$n=1$ 时, 由于三角形内角和是平角, $P(1)$ 成立。

假设 $P(n)$ 成立, 下面证明 $P(n+1)$ 成立。

设有凸 $n+3$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$, 将它裁成三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$ 。前者的内角和是平角。根据 $P(n)$, 后者的内角和是 n 个平角, 因此, $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内角和是 $n+1$ 个平角。于是 $P(n+1)$ 成立。

因此对所有正整数 n , 命题 $P(n)$ 成立。 $\square$

满足什么条件时, 凸多边形是圆内接多边形呢? 最直接的条件, 自然是平面上有一个圆, 使多边形顶点都在圆上。或者说, 能找到一点, 到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点, 可以查看多边形各边和各条对角线的垂

直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形各个的内角角度是 $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$ 。

习题 2.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？

2. 设有整数 $1 \leq i, j, k, l \leq n$ ，圆内接 n 边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 中， $\angle A_i A_k A_j$ 和 $\angle A_i A_l A_j$ 有什么关系？

2.6 弧长与面积*

我们已经学习过圆的周长和面积：圆的周长和直径成正比，比率大约是 3.14。这个比率对任意圆都一样，称为**圆周率**，一般记为 π 。圆的面积则与圆的直径的平方成正比，比率为 $\frac{\pi}{4}$ 。如果已知圆的半径 r ，圆的周长是它的 2π 倍，圆的面积则是 πr^2 。我们是这样求圆的面积的：

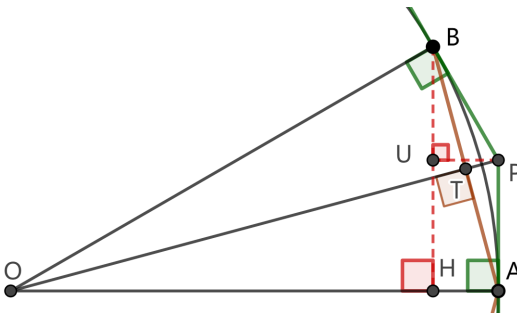
1. 将圆按圆心均匀分成 n 份，每份是一个小扇形。
2. 将 n 个小扇形上下交错地排成一排。
3. n 很大时，小扇形排成一排后近似一个矩形。它的长是圆周长的一半，宽是圆的半径。
4. 因此圆的面积等于矩形面积，也就是周长乘半径的一半，或者说半径平方的 π 倍。

以上的思路中，不少部分是模糊的，比如“ n 很大”、“近似矩形”等等。下面，我们从更严格的角度重新认识圆的弧长和面积。

圆是曲线图形。我们知道，圆弧作为圆的一部分，它的长度和半径以及圆心角成正比。设圆的半径为 r ，圆心角为 m 度，则弧长为 $\frac{m\pi r}{180}$ 。比如，圆心角为直角，对应的弧长就是 $\frac{\pi r}{2}$ 。另一方面，圆的面积和半径的平方成正比。这是无法从已有公理得到的。我们需要一条新的公理：

公理. 相似形面积公理 相似形面积之比是相似比的平方。

圆的定义只涉及圆心和半径，而圆心的位置移动时，圆的大小不变。因此，圆的大小只和半径有关。而圆的形状与大小无关，也就是说所有圆都相似，而相似比是半径的比。因此，根据相似形面积公理，相似的圆，面积之比是相似比的平方，也就是半径比的平方。如果设半径为 1 的圆的面积是 S_1 ，那么半径为 r 的圆，面积是 $S_1 r^2$ 。



下面来论证 $S_1 = \pi$ 。为此，我们需要详细讨论前面提到的小扇形的面积。

如上图，单位圆的圆心为 O ，半径 $|OA| = 1$ ，圆心角 $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ ，小扇形 AOB 的面积是圆 O 面积的 n 分之一。它大于三角形 AOB 的面积。过 B 作 OA 的垂线，记垂足为 H ，则

$$S_{\text{扇形}AOB} > S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |BH| = \frac{1}{2}|BH|.$$

另一方面，作 A 、 B 的中垂线交线段 AB 于点 T ，交圆 O 在 A 点的切线于 P ，则 BP 是圆 O 在 B 点的切线。小扇形 AOB 的面积小于三角形 AOP 面积与三角形 BOP 面积之和。

过 P 作 BH 的垂线, 垂足为 U , 则

$$|AP| + |BP| = |HU| + |BP| < |HU| + |PU| + |BU| = |BH| + |AH|.$$

因此,

$$\begin{aligned} S_{\text{扇形}AOB} &< S_{\triangle AOP} + S_{\triangle BOP} \\ &= \frac{1}{2}(|OA| \cdot |AP| + |OB| \cdot |BP|) \\ &= \frac{1}{2}(|AP| + |BP|) \\ &< \frac{1}{2}(|BH| + |AH|). \end{aligned}$$

我们知道圆弧 $\widehat{AB}$ 的长度为 $\frac{2\pi}{n}$. $|BH| < |AB|$, 而 AB 作为线段, 长度小于 $\widehat{AB}$. 如果可以证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP| + |BP|$, 那么就有

$$|BH| < \frac{2\pi}{n} \leq |AP| + |BP| < |BH| + |AH|.$$

而从图中我们可以猜测, $\angle AOB$ 接近零角的时候, $|AH|$ 比 $|BH|$ 小得多. 这个猜测不无道理, 实际上,

$$|AH| = |OA| - |BH| = 1 - \sqrt{1 - |BH|^2},$$

而我们可以证明, 当 $0 < x < 1$ 时, $1 - \sqrt{1 - x} < x$, 因此,

$$|AH| < |BH|^2 < \frac{4\pi^2}{n^2}.$$

于是

$$|BH| > \frac{2\pi}{n} - |AH| > \frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi^2}{n^2}.$$

小扇形 AOB 的面积是单位圆面积的 n 分之一, 因此, 从前面讨论可以得到:

$$\frac{n}{2}|BH| < n \cdot S_{\text{扇形}AOB} = S_1 < \frac{n}{2}(|BH| + |AH|).$$

因此, 单位圆的面积在以下范围内:

$$\pi - \frac{2\pi^2}{n} < S_1 < \pi + \frac{2\pi^2}{n}.$$

这个结论对任何 n 成立, 所以可以写成:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_1 - \pi| < \frac{2\pi^2}{n}.$$

无论 n 多大, 单位圆的面积和圆周率 π 之间的差别总小于 $\frac{2\pi^2}{n}$ 。这说明单位圆的面积只能等于 π 。否则, 设 $|S_1 - \pi| > 0$, 则当 n 为比 $\frac{2\pi^2}{|S_1 - \pi|}$ 大的整数时, 就会有 $|S_1 - \pi| \geq \frac{2\pi^2}{n}$, 产生矛盾。

最后, 我们还需要解决一个问题, 就是证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP| + |BP|$ 。这需要对曲线长度有更多的了解。要知道, 至今为止, 我们对曲线长度的唯一认识, 就是从“两点之间线段最短”推出的“连接两点的曲线总比两点之间的线段长”。曲线什么时候比线段短呢? 我们需要引入一个新的公理:

公理. 曲线长公理 设 γ 是连接两点 A 、 B 的曲线。给定正实数 c 。如果对 γ 上任意依次选取的若干点 $A = A_0, A_1, \dots, A_m = B$, 总有

$$|A_0A_1| + |A_1A_2| + \dots + |A_{m-1}A_m| \leq c,$$

那么曲线 γ 的长度小于等于 c 。

通常把线段 A_0A_1 、 A_1A_2 等合称为曲线 γ 上的折线, 记为 $A_0A_1 \dots A_m$ 。曲线长公理说明, 曲线的长度就是曲线上折线长度的上限。

来看圆弧的长度。

定理 2.6.1. 给定圆 O , 设圆心与圆上两点 B 、 C 的连线分别交圆在圆上一点的切线于 D 、 P , 则 $|BC| < |DP|$ 。

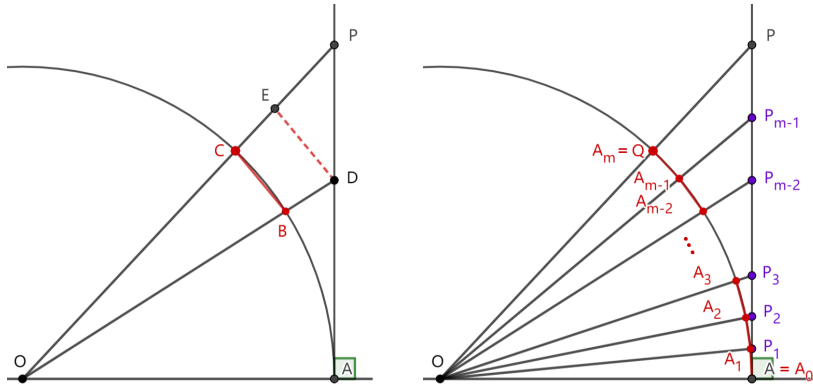
证明： 如下图左，我们过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 OP 于 E ，则 $\triangle BOC \sim \triangle DOE$ 。 $|OD| > |OB|$ ，因此 $|BC| < |DE|$ 。另外， $\triangle DOE$ 也是等腰三角形，因此 $\angle OED = \angle EDO$ 。于是

$$\begin{aligned}\angle OPD &= 180^\circ - \angle DOP - \angle PDO \\ &> 180^\circ - \angle EDO \\ &= 180^\circ - \angle OED = \angle DEP\end{aligned}$$

这说明 $\triangle EDP$ 中， $|DE| < |DP|$ 。于是

$$|BC| < |DE| < |DP|.$$

□

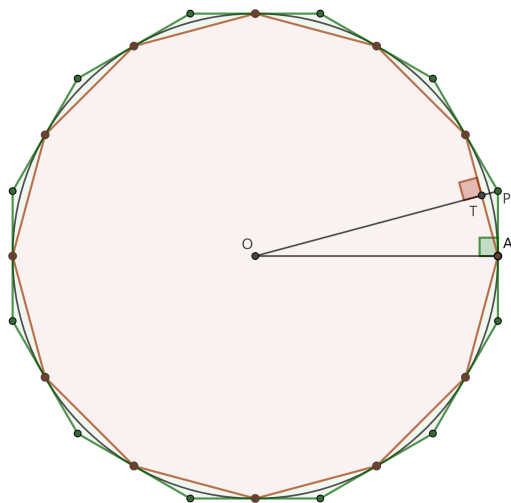


下面证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP| + |BP|$ 。设 OP 交圆于 Q ，如上图右，设有 $\widehat{AQ}$ 上的折线 $AA_1A_2 \cdots A_{m-1}Q$ 。从圆心出发经过折线各端点的射线分别交 AP 于 $P_1, P_2, P_{m-1}, P_m = P$ ，根据定理 2.6.1，

$$|AA_1| < |AP_1|, |A_1A_2| < |P_1P_2|, \cdots, |A_{m-1}Q| < |P_{m-1}P|.$$

因此折线长度小于 $|AP|$ 。根据曲线长公理， $\widehat{AQ}$ 的长度小于等于 $|AP|$ 。同理， $\widehat{QB}$ 的长度小于等于 $|BP|$ 。因此 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP| + |BP|$ 。

总结以上的讨论，我们从圆周率 π 出发，说明了圆的面积等于半径平方的 π 倍。那么，圆周率本身是否存在呢？我们仍然可以从曲线长公理和定理 2.6.1 出发讨论。



如果一个多边形覆盖一个圆，且每条边都和它相切，就说这个多边形是圆的**外切多边形**。我们可以做出圆的内接正 n 边形和外切正 n 边形。上图是 $n = 12$ 的情形。

圆的周长总大于等于其内接多边形的周长，而根据定理 2.6.1，圆的周长总小于等于其外切正多边形的周长。因此，我们总能得到圆周率的范围。比如， $n = 4$ 时，我们可以得出 $2\sqrt{2} < \pi < 4$ 。随着 n 增大，直观上圆的外切正 n 边形和内接正 n 边形的相似比将越来越接近 1，它们的周长之差将越来越小，因此越来越接近圆的周长。最终两者将趋于同一个值，也就是圆的周长。

思考 2.6.1. 以上证明圆的面积的过程中

1. 是否有别的方法证明 $|AH| < |BH|^2$?
2. 是否能证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于 $|AP| + |BP|$?

习题 2.6.1.

1. 证明：对 $0 < x < 1$ ，总有 $1 - x < \sqrt{1 - x}$.
2. 证明：延长等腰三角形 OAB 两腰至 C, D ，则 $|AB| < |CD|$ 。

第三章 三角函数

通过研究点、直线、角和三角形、四边形、圆形，我们对简单的平面图形有了更多的认识。其中对三角形的研究贯通了我们对各种形状的探索。通过对三角形性质的理解，我们建立了三角形和四边形、圆形乃至更复杂的形状之间的关系。

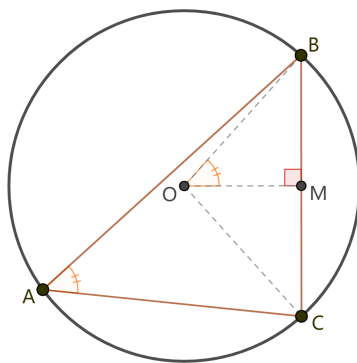
如果对前面学习的知识做一次整理，我们会发现，大多数的结论要么和共点、共线、共圆有关，要么是长度之间、角度之间的相等或简单倍数关系。我们把这些结论称为定性结论。

在科学研究和生产实践中，我们更需要知道的是形状之间定量的关系。比如，如果三角形的三边长度分别是 4, 5, 6，我们希望知道三角形内角到底是多少度。又比如，如果菱形两条邻边长度为 1，夹角为 50° ，我们希望知道菱形对角线的长度。为此，我们从三角形的边角关系着手研究。

我们的目标是解三角形：已知三角形部分边角的大小，求其余边角的值。

3.1 正弦函数

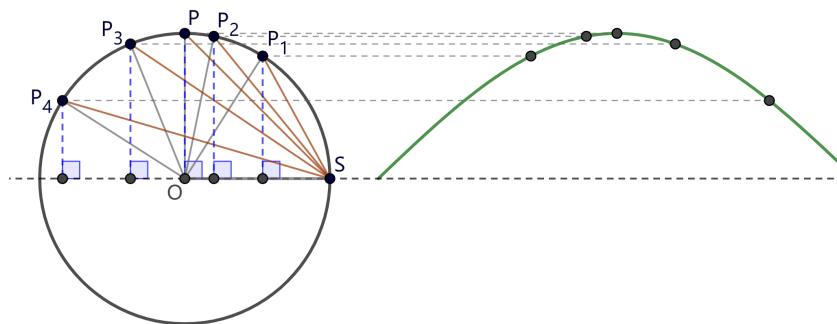
如右图，我们想知道三角形 ABC 中 $\angle A$ 的角度和对边 BC 长度的关系。为此，我们



作 ABC 的外接圆 O , 则 BC 是 O 的弦。 $\angle A$ 作为圆周角, 是圆心角 $\angle COB$ 的一半。作 BC 中点 M , 则 $\angle A = \angle MOB$ 。这样, 我们就把一般三角形的边角关系转化成了直角三角形 MBO 的边角关系。

那么, 直角三角形的角和边有什么关系呢? 我们先来看另一个问题。

考虑半径为 1 的圆 O (这个圆以后会经常出现, 我们把它叫做单位圆) 和圆上一点 S 。给定角 α , 以 OS 为始边, 角的终边交圆 O 于点 P 。称 $\triangle SOP$ 为角 α 对应的单位三角形 (如下图)。根据三角形面积公式 (底乘高除以 2), 单位三角形的面积等于 P 到始边距离的一半。



不难看出, α 为直角时, 单位三角形的面积最大, 为 $\frac{1}{2}$ 。其它情况下, 运用勾股定理可知, P 到始边距离小于半径, 因此面积小于 $\frac{1}{2}$ 。

我们把角 α 对应的单位三角形的面积和直角对应的单位三角形面积之比称为 α 的正弦或正弦值, 记为 $\sin \alpha$ 。 $\sin A$ 就是 P 到始边距离, 也就是前面直角三角形 MBO 中 BM 与外接圆半径之比, 或弦长与外接圆直径之比。

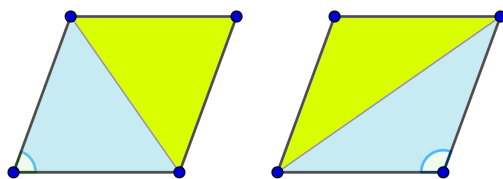
角度在零角到平角之间的每个角, 都可以按以上方法定义正弦。更准确来说, 我们定义的是角度的正弦。不过, 它实际上对应着一个把数映射到数的映射, 也就是函数。比如, 0 和 180 之间的任何实数, 都通过角度制的圆映射对应某个角度, 从而对应某个正弦值。

另一种对应方法使用弧度, 也就是把角度在单位圆上对应的弧长映射

到角度的正弦值。比如， 60° 角对应着圆周的六分之一，在单位圆上对应的弧长是 $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 。我们就说 60° 角的正弦值是 $\sin \frac{\pi}{3}$ 。把角度或角度在单位圆上的弧长对应到角度的正弦值的函数，称为**正弦函数**。

正弦函数有什么性质呢？观察不同角度对应的单位三角形可知，零角的正弦值是 0（退化的三角形面积为 0）。从零角出发，随着角度增大，正弦值不断增大；直角时，正弦值达到最大值 1。然后，随着角度增大，正弦值不断减小；平角时，正弦值减为 0。

两个角互为补角时，对应的单位三角形是同一个菱形按不同对角线剖开得到的一半。所以两者面积相等。也就是说，**两个角互为补角，则正弦值相等**。因此，我们将把重点放在研究锐角的正弦值上。



对具体的某个角度来说，怎么计算它的正弦值呢？这个问题不简单。以我们掌握的知识，还无法精确计算任意角度的正弦值，甚至难以估计任意角度的正弦值。求解任意角度的正弦值属于实变函数分析的重要基础内容。目前，我们可以使用正弦函数表，查找角度的正弦值，或通过使用计算器、编程等方式，借助计算机计算角度的正弦值。使用正弦表，可以方便地查找角度对应的正弦值。以下是整数角度的正弦表：

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0°	0.0000	0.1736	0.3420	0.5000	0.6428	0.7660	0.8660	0.9397	0.9848
1°	0.0175	0.1908	0.3584	0.5150	0.6561	0.7771	0.8746	0.9455	0.9877
2°	0.0349	0.2079	0.3746	0.5299	0.6691	0.7880	0.8829	0.9511	0.9903
3°	0.0523	0.2250	0.3907	0.5446	0.6820	0.7986	0.8910	0.9563	0.9925
4°	0.0698	0.2419	0.4067	0.5592	0.6947	0.8090	0.8988	0.9613	0.9945
5°	0.0872	0.2588	0.4226	0.5736	0.7071	0.8192	0.9063	0.9659	0.9962
6°	0.1045	0.2756	0.4384	0.5878	0.7193	0.8290	0.9135	0.9703	0.9976
7°	0.1219	0.2924	0.4540	0.6018	0.7314	0.8387	0.9205	0.9744	0.9986
8°	0.1392	0.3090	0.4695	0.6157	0.7431	0.8480	0.9272	0.9781	0.9994
9°	0.1564	0.3256	0.4848	0.6293	0.7547	0.8572	0.9336	0.9816	0.9998

每列的数据十位相同，每行的数据个位相同。比如，要查 26° 的正弦值，就在十位为 2 的第三列，找到个位为 6 的第七行，查得正弦值为 0.4384。

对于非整数角度的正弦值，我们可以查询更精确的正弦表，或者用一次函数来近似估计。如果我们把整数角度的正弦值看作正弦函数的函数值，在直角坐标系上画出函数值对应的点，可以观察到正弦函数的值从 0 平稳增长到 1。因此，可以认为两个整数角度之间，正弦函数的图像近似于线段，也就是一次函数图像的一部分。因此，非整数角度的正弦值可以通过计算线段上点的坐标而得到。

举例来说， 37° 和 38° 之间的角度（比如说 37.3° ）的正弦值，可以看作经过 $(37, \sin 37^\circ)$ 和 $(38, \sin 38^\circ)$ 两点的一次函数图像在横坐标为 37.3 时对应的纵坐标。这个一次函数可以写成：

$$y = \sin 37^\circ + \frac{\sin 38^\circ - \sin 37^\circ}{38 - 37} \cdot (x - 37)$$

横坐标 $x = 37.3$ 时，代入函数表达式，就得到：

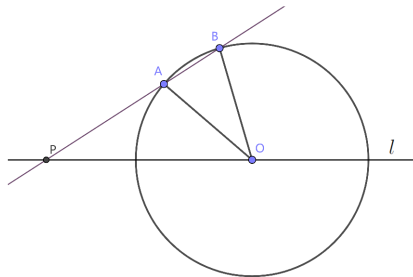
$$\begin{aligned} y &= \sin 37^\circ + 0.3 \cdot (\sin 38^\circ - \sin 37^\circ) \\ &= 0.6018 + 0.3 \cdot (0.6157 - 0.6018) \approx 0.60597 \end{aligned}$$

实际上 $\sin 37.3^\circ \approx 0.60599$ ，可见偏差不大。

反过来，如果已知角的正弦值，也可以通过查表，估计角度的大小。比如，已知 $\sin A = 0.83$ ，查表可知 $\angle A$ 大小在 56° 和 57° 之间。

想一想，如果要得到更精确的结果，除了查询更精确的正弦表，还可以怎么做？

习题 3.1.1. 如右图，延长 BA 交 l 于点 P 。



1. 计算 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$ 。

2. 通过比较 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$ ，证明

锐角的正弦值随角度增大而增大，钝角的正弦值随角度增大而减小。

3. 从 46° 、 48° 的正弦值出发，用一次函数近似估计 47° ，和正弦表上的值比较。哪个值比较大？对别的角度试一试，估计值的偏差有什么规律？

4. 已知某锐角的正弦值为 0.73 ，请估计它的角度大小。

3.2 正弦定理

我们可以用正弦值来探讨三角形的边角关系。首先把正弦值应用到一般三角形的面积上。我们知道 $\angle A$ 对应的单位三角形的面积是 $\frac{1}{2} \sin A$ 。如果 $\angle A$ 的两邻边长度分别是 b 和 c ，那么根据等高三角形的面积关系，三角形的面积是单位三角形的 bc 倍，也就是 $\frac{1}{2}bc \sin A$ 。

定理：三角形两边长度为 b 和 c ，夹角为 A ，则面积为 $\frac{1}{2}bc \sin A$ 。

设三角形 ABC 中 A, B, C 对边长度为 a, b, c ，那么它的面积可以用三

种方式表示:

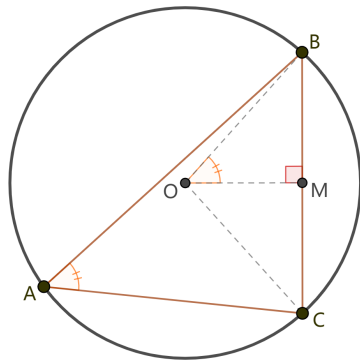
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

两边除以 $\frac{abc}{2}$, 就得到:

$$\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}.$$

上式告诉我们, 三角形三个内角的正弦值和对边长度的比是定值 $\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}$ 。如何理解这个定值呢? 让我们回到前面的三角形 MOB 。我们知道 $BM = R \sin A$, 其中 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径。所以 $\frac{a}{2} = R \sin A$, 即 $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{2R}$ 。也就是说,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



定理 3.2.1. 正弦定理 三角形任一边长与其对角正弦值之比为外接圆直径。

从正弦定理可以立刻得出: 三角形的面积等于三边长之积与外接圆半径之比的四分之一。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

下面来看正弦定理的具体应用。

例子 3.2.1. 三角形 ABC 中, 边 AB 、 AC 长度分别为 3 和 5, $\angle B = 80^\circ$, 求 BC 的长度和 $\angle C$ 的大小。

解答. 根据正弦定理:

$$\frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin C},$$

所以 $\sin C = \frac{|AB| \sin B}{|AC|}$ 。查表知 $\sin 80^\circ = 0.9848$, 算得 $\sin C \approx 0.5909$, 反查正弦表可知 $\angle C \approx 36.2^\circ$ 或 $\angle C \approx 143.8^\circ$ 。由于三角形内角和是平

角, $\angle C + \angle B < 180^\circ$, 故排除 $\angle C \approx 143.8^\circ$ 。于是 $\angle C \approx 36.2^\circ$, $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C \approx 63.8^\circ$, 使用正弦定理可算得:

$$|BC| = \frac{|AB| \sin A}{\sin B} = \frac{3 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 63.8^\circ} \approx 3.29$$

已知三角形两边长度和其中一边对角的大小, 可以根据正弦定理得出另一边对角的正弦值, 从而得出它的角度。用平角减去两角角度, 就得到第三个角的大小。再次使用正弦定理, 就得到第三边的长度。要注意的是, 用正弦定理算出的是角的正弦值, 而不是角度。由于互为补角的正弦值相等, 同一个正弦值对应两个互为补角的角度。因此, 给定三角形两边和其中一边的对角, 并不一定能确定三角形的形状。换句话说, “边边角” 不能用来证明三角形全等。

例子 3.2.2. 已知三角形 ABC 中, $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C$ 对边长度 $c = 4$, 求另两边的长度。

解答. 三角形内角和为平角, 所以 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 41^\circ$ 。根据正弦定理:

$$\frac{a}{\sin 64^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 41^\circ}.$$

$$\text{所以 } a = \frac{c \sin 64^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{4 \times 0.8988}{0.6561} \approx 5.48, \quad b = \frac{c \sin 75^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{4 \times 0.9659}{0.6561} \approx 5.89.$$

已知两内角大小和一边的长度, 等于知道所有内角大小和一边边长。根据正弦定理, 可以算出另两边的长度。这说明 “角边角” 和 “角角边” 都可以用来证明三角形全等。

正弦定理不仅可以用来处理定量关系, 也可以用来处理定性关系。三角形的边长和对角的正弦值之比是定值, 所以, 边长越大, 对角的正弦值也越大。而锐角的正弦值随着角度增大而增大, 至直角达到最大。所以, 锐角和直角三角形中, 较大的边, 对角也较大, 较大的角, 对边也较大。这个性质称为 “大边对大角”、“大角对大边”。

对钝角三角形, “大边对大角”、“大角对大边”的结论是否也成立呢? 设三角形 ABC 中 $\angle A$ 是钝角, 则 $\angle A$ 的补角是锐角。三角形内角和为平角, 所以 $180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C > \angle B$, $\angle A$ 的补角大于 $\angle B$, 即 $\sin A = \sin(B + C) > \sin B$ 。同理, $\sin A > \sin C$ 。钝角 $\angle A$ 作为较大的角, 其正弦值大于锐角 $\angle B$ 和 $\angle C$ 。而 $\angle B$ 和 $\angle C$ 同为锐角, “大边对大角”、“大角对大边”的结论在两者之间同样成立。综上所述, 任意三角形中, “大边对大角”、“大角对大边”的结论总成立。

习题 3.2.1.

1. 设三角形 ABC 内角 A, B 的公共边为 c , 证明: $S_{\triangle ABC} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)}$ 。
2. 三角形一边的长度是另一边的 2 倍。证明: 至少有一个内角不大于 30° , 一个内角不小于 75° 。
3. 已知三角形 ABC 中 $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C$ 对边长度 $c = 8$, 求另两边的长度。
4. 已知三角形两边长度是 4、5, 一个内角是 40° , 第三边的长度有几种可能? 找出所有满足条件的三角形。
5. 已知三角形两边长度是 4、5, 一个内角是 70° , 第三边的长度有几种可能? 结论和上一题有什么不同? 找出所有满足条件的三角形。

3.3 余弦函数

例子 3.3.1.

1. 三角形 ABC 中, 边 BC 、 AC 的长度分别是 4、6, $\angle C = 50^\circ$, 求 AB 长度。
2. 三角形 ABC 中, 边 AB 、 AC 、 BC 的长度分别为 3、5、6, 求三个内角的大小。

使用正弦定理, 我们列出以下等式:

$$1. \frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{|BC|}{\sin 50^\circ}.$$

$$2. \frac{6}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}.$$

每个等式中都有两个未知量。我们无法直接用正弦定理计算内角的正弦值了。不过，既然我们能通过“边边边”和“边角边”证明三角形全等，这让我们猜想，有别的方法计算内角的角度。

第一题中，让我们把 $\angle C$ 改为直角，那么根据勾股定理， $|AB| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ 。

第二题中，让我们把 AB 、 AC 、 BC 的长度换成 3、4、5，我们观察到最长边边长的平方等于另两边边长的平方和。根据勾股定理逆定理，三角形是直角三角形。所以 $\angle A$ 是直角。用正弦定理得 $\sin B = 0.8$ ， $\sin C = 0.6$ ，查表可知 $\angle B \approx 53^\circ$ ， $\angle C \approx 37^\circ$ 。

可以看出，对于直角三角形，由于有勾股定理作为“武器”，我们总可以破解三角形的边角关系。因此，我们需要“升级装备”，把勾股定理推广为对一般的三角形也适用的结论。为此，我们需要定义角的余弦。

什么是角的余弦呢？我们已经定义了角的正弦。在直角三角形中，锐角的正弦是对边长度与斜边长度之比。这个公式中我们用到了三角形的两条边。我们定义锐角的**余弦**（或**余弦值**）为剩余的直角边（也就是相邻的直角边）长度与斜边长度之比。在 MOB 的例子中，角 A 的余弦就是弦 BC 的弦心距，记为 $\cos A$ 。

显然，直角三角形中，一个锐角的邻边就是另一个锐角的对边。所以**锐角的余弦等于它的余角的正弦**：

$$\forall 0 \leq A \leq 90^\circ, \cos A = \sin(90^\circ - A).$$

这样我们就定义了**余弦函数**。零角的余弦是 1。从零角出发，随着角度增大，角的余弦逐渐减小。直角时，余弦值达到最小值 0。

此外，角的正弦和余弦分别是直角三角形两条直角边和斜边的比值。所

以根据勾股定理,

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

其中 $\cos^2 A, \sin^2 A$ 分别是 $(\cos A)^2, (\sin A)^2$ 的简便记法。这个结论也叫三角勾股定理。

怎么计算角的余弦值呢? 从三角勾股定理定理可以看出, 已知锐角的正弦, 就可以得到它的余弦: $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ 。所以, 可以查正弦表得到角的正弦值, 再求出余弦值。反过来, 已知锐角的余弦, 可以先算出它的正弦, 然后查表得到角度。

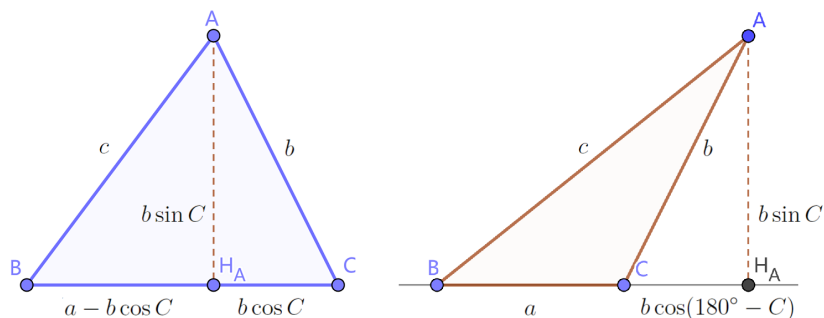
习题 3.3.1.

1. 从等腰直角三角形的性质出发, 计算 45° 的正弦和余弦值。
直角三角形 ABC 中, $\angle C$ 是直角。斜边长度 c 是直角边长度 a 的 2 倍。
2. 作斜边中点 M , 证明: $\triangle BMC$ 是正三角形。
3. 计算 30° 和 60° 的正弦和余弦值。
等腰三角形 ABC 中, 顶角 $\angle A$ 是底角 $\angle B$ 的 2 倍。
4. 设 $\angle B$ 的平分线交对边于点 D 。证明: $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ 。
5. 设底边长 $a = 1$, 腰长 $b = c = x$, 证明: $x^2 - x - 1 = 0$ 。
6. 计算 $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ 和 72° 的正弦和余弦值。

3.4 余弦定理

定义了角的余弦, 我们再来看前面“边边边”的问题 (例题 3.3.1 第一题)。如果 $\angle C$ 是直角, 那么根据勾股定理, 可以直接求出 AB 长度。如果 $\angle C$ 不是直角, 我们希望把问题转化为直角三角形的边角关系。

作顶点 A 到 BC 的高, 记垂足为 H_A , 则 $H_A \neq C$ 。 $\triangle ACH_A$ 是直角三角形, 所以 $|AH_A| = |AC| \sin C = b \sin C$ 。如果 $\angle C$ 是锐角, 那么 H_A 在线段 BC 上, $|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos C$; 如果 $\angle C$ 是钝角, 那么 H_A 在线段 BC 延长线上, $|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos(180^\circ - C)$ 。



$\triangle ABH_A$ 是直角三角形。根据勾股定理, $|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2$ 。如果 $\angle C$ 是锐角, 那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| - |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2 C + a^2 - 2ab \cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

我们得到了 a 、 b 、 c 和 $\angle C$ 的关系。这个关系叫做**余弦定理**。可以看出, $\angle C$ 为直角时, 余弦定理就变成了勾股定理。所以, 余弦定理是勾股定理的“升级版”, 勾股定理可以看作是余弦定理的特例。使用余弦定理, 我们可以解决例题 3.3.1 第一题。

解答. 根据余弦定理,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 50^\circ \approx 21.15.$$

因此 $c \approx \sqrt{21.15} \approx 4.6$ 。

用同样的方法, 能否解决第二题呢? 我们列出等式:

$$6^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos C$$

解得 $\cos C = -\frac{1}{15}$ 。显然，任何锐角或直角的余弦都不是负数。我们猜测，这是因为 C 是钝角，而前面的推导中， $\angle C$ 是锐角。

来看 $\angle C$ 是钝角的情况。如果 $\angle C$ 是钝角，那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| + |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \sin C)^2 + (a + b \cos(180^\circ - C))^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2(180^\circ - C) + a^2 + 2ab \cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

可以看到，对钝角三角形，余弦定理的表达式比锐角三角形复杂很多。把 $a = 3$ 、 $b = 5$ 、 $c = 6$ 代入钝角的余弦定理公式，我们发现难以解出 C 。公式中，含有 C 的项无法像锐角的情况里那样合并化简，原因在于我们没有定义钝角的余弦值，只能用锐角 $180^\circ - C$ 的余弦值来表示。

如何定义钝角的余弦值呢？钝角的正弦为其补角的正弦。我们希望钝角的余弦也满足三角勾股定理：

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

这就要求

$$\begin{aligned} \cos C &= \sqrt{1 - \sin^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(180^\circ - C)} \\ &= \pm \cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦： $\cos C = \cos(180^\circ - C)$ ，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos C.$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦的相反数： $\cos C = -\cos(180^\circ - C)$ ，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

显然，后一种情况下，钝角三角形和锐角三角形余弦定理的形式就统一了。接下来我们会看到，后者在各个方面都更加合理。

习题 3.4.1.

1. 已知三角形三边长为 5、7、8，求三内角的大小。

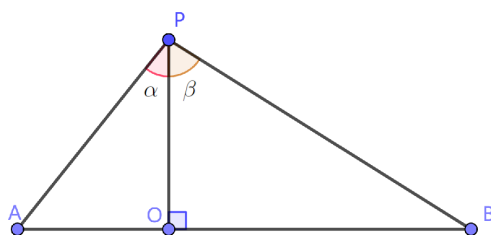
$\triangle ABC$ 中， $|AB| = 6, |BC| = 3, |CA| = 5$,

2. 求 $\angle A$ 的大小。

3. 求 $\angle B, \angle C$ 的大小。

3.5 和差角公式

解决平面形状的问题时，我们常常需要处理角度的和与差。给定两个角度 α 、 β ，我们希望能够给出 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha - \beta$ 的正弦和余弦值。换句话说，我们希望能够打通正弦函数、余弦函数和实数的加减法的关系。



让我们从两个锐角的和出发。如上图， $\alpha = \angle APO$ 和 $\beta = \angle OPB$ 都是锐角， $OP \perp AB$ 。 $\triangle AOB$ 的面积是 $\triangle AOP$ 、 $\triangle BOP$ 面积之和。用相应的面积公式表示：

$$\frac{1}{2}|AP||BP| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|AP||OP| \sin \alpha + \frac{1}{2}|OP||BP| \sin \beta$$

因此：

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{|OP|}{|BP|} \sin \alpha + \frac{|OP|}{|AP|} \sin \beta$$

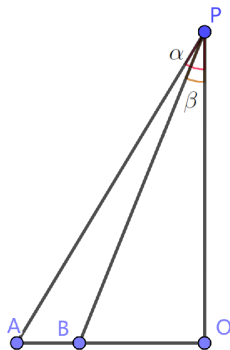
$\triangle AOP$ 、 $\triangle BOP$ 都是直角三角形，所以 $|OP| = |AP| \cos \alpha = |BP| \cos \beta$ 。
代入上式，就得到：

$$\forall 0 < \alpha, \beta < 90^\circ, \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

这就是两锐角之和正弦值的公式，简称**和角正弦公式**。可以验证，当 α 、 β 是零角或直角的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0 \leq \alpha, \beta \leq 90^\circ$ 。

对于两锐角之差，可以用类似的方式推导。如右图，
设 $\alpha = \angle APO > \beta = \angle BPO$ ， $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle APB$ 、
 $\triangle OPB$ 面积之和。比照和角正弦公式的推导，可以得到：

$$\forall 0 < \beta < \alpha < 90^\circ, \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$



是为两锐角之差正弦值的公式，简称**差角正弦公式**。

可以验证，无论是当 α 、 β 是零角或直角的时候，还是 $\alpha = \beta$ 的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 90^\circ$ 。

注意到和角、差角正弦公式中都出现了角的余弦，我们可以据此推出和角、差角的余弦公式。首先，假设 α 、 β 、 $\alpha - \beta$ 都是锐角。从和角正弦公式出发，可以得到这样的关系：

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha - \beta + \beta) = \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta.$$

这个等式中只有 $\cos(\alpha - \beta)$ 是未知的。根据差角正弦公式，可以得到：

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \\ &= (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos^2 \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \sin \beta \cos(\alpha - \beta) &= \sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \alpha \sin^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \beta (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)
 \end{aligned}$$

两边约去 $\sin \beta$, 就得到:

$$\forall 0 < \beta < \alpha < 90^\circ, \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

这就是两锐角之差余弦值的公式, 简称**差角余弦公式**。

同理, 假设 α 、 β 、 $\alpha + \beta$ 都是锐角, 从差角正弦公式出发, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + \beta - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \\
 &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \\
 &= \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \sin \beta \cos(\alpha + \beta) &= -\sin \alpha + \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= -\sin \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= -\sin \alpha \sin^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)
 \end{aligned}$$

两边约去 $\sin \beta$, 就得到:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

这就是两锐角之和余弦值的公式, 简称**和角余弦公式**。

要注意的是, 上面的推导中, 我们假设 α 、 β 、 $\alpha + \beta$ 是锐角。然而, 推导中涉及的项, 除了 $\cos(\alpha + \beta)$, 都不要要求 $\alpha + \beta$ 是锐角。另一方面, 在和

角余弦公式中, 只要确定了 α, β , 就能计算 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 。所以, $\alpha + \beta$ 是直角或钝角时, 我们可以定义 $\cos(\alpha + \beta)$ 为关于 x 的方程:

$$x = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

的唯一解。这样, 我们就定义了钝角的余弦值。当然, 这样定义钝角余弦值, 不好理解。为了好理解, 我们仿照正弦, 给出互为补角的两角余弦的关系。这样, 通过单个锐角的余弦值, 就能得到钝角的余弦值了。

在和角余弦公式中, 令较大角为直角, 代入得到

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \cos(90^\circ + \beta) = -\sin \beta.$$

对锐角 β 来说, $90^\circ - \beta$ 也是锐角, 于是:

$$-\cos \beta = -\sin(90^\circ - \beta) = \cos(180^\circ - \beta).$$

这说明 $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ 。互为补角的两角, 余弦值互为相反数。

上一节中, 我们让钝角的余弦等于其补角的相反数。现在我们看到, 这个选择是合理的。至此, 我们可以写出余弦定理的统一形式:

定理 3.5.1. 余弦定理 设三角形 ABC 的内角 A, B, C 对边长度分别为 a, b, c , 则

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

余弦定理说明, 三角形内角的余弦值, 决定了它对边边长的平方与另两边边长的平方和的大小关系。锐角的余弦值大于 0, 它对边边长的平方小于另两边边长的平方和。钝角的余弦值小于 0, 它对边边长的平方大于另两边边长的平方和。直角的余弦值是 0, 它对边边长的平方等于另两边边长的平方和。

回到例题 3.3.1 第二题。之前我们算出 $\cos C = -\frac{1}{15}$, 说明 C 是钝角。于是 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \approx 0.9978$, 查表知锐角 $180^\circ - C \approx 86.2^\circ$, 即 $\angle C \approx 93.8^\circ$ 。同理, 可以算得 $\angle A \approx 29.9^\circ$, $\angle B \approx 56.3^\circ$ 。

我们用和角余弦公式定义了钝角的余弦。用同样的思路，我们考虑差角正弦公式：

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

上式对 $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 90^\circ$ 成立。现在我们把它扩展到 $\alpha < \beta$ 的情况。也就是说，对小于零角的角度 $\alpha - \beta$ ，我们定义 $\sin(\alpha - \beta)$ 是关于 x 的方程：

$$x = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

的唯一解。令 $\alpha = 0$ ，就得到：

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \sin(-\beta) = -\sin \beta.$$

我们再把这个关系扩展到钝角。这样，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的正弦值。

最后，考虑差角余弦公式：

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

比照差角正弦公式，对小于零角的角度 $\alpha - \beta$ ，我们同样可以定义 $\sin(\alpha - \beta)$ 是关于 x 的方程：

$$x = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

的唯一解。令 $\alpha = 0$ ，就得到：

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \cos(-\beta) = \cos \beta.$$

同样把这个关系扩展到钝角，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的余弦值。

注意到负平角到正平角经历了整个周角，因此，定义了负平角到正平角的正弦和余弦值，实际上就定义了所有角度的正弦和余弦值。至此，我们可以从锐角出发，得到所有角度的正弦、余弦，而且它们的关系与和差角公式相容。

例子 3.5.1.

1. 求 500° 的正弦、余弦值。
2. 求 -465° 的正弦、余弦值。

解答.

1. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin 500^\circ = \sin 140^\circ, \quad \cos 500^\circ = \cos 140^\circ.$$

140° 是正钝角，因此取补角得到锐角：

$$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ, \quad \cos 140^\circ = -\cos 40^\circ.$$

查表得到 $\sin 500^\circ = \sin 40^\circ \approx 0.6428$, $\cos 500^\circ = -\cos 40^\circ \approx -0.766$ 。

2. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin -465^\circ = \sin -105^\circ, \quad \cos -465^\circ = \cos -165^\circ.$$

140° 是负钝角，取相反数变为正角，再取补角得到锐角：

$$\begin{aligned} \sin -105^\circ &= -\sin 105^\circ = -\sin 75^\circ, \\ \cos -105^\circ &= \cos 105^\circ = -\cos 75^\circ. \end{aligned}$$

查表得到 $\sin -465^\circ = -\sin 75^\circ \approx -0.9659$, $\cos -465^\circ = -\cos 75^\circ \approx -0.2588$ 。

综上所述，可以这样总结任意角的正余弦与锐角正余弦的关系：

求任意角的正弦：

1. 不断加减周角，直到角度落在 $(-180^\circ, 180^\circ]$ 中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果取相反数。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果不变。

求任意角的余弦：

1. 不断加减周角，直到角度落在 $(-180^\circ, 180^\circ]$ 中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果不变。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果取相反数。

习题 3.5.1.

1. 验证：和角、差角公式对负平角到正平角中的角度成立。
2. 证明正弦和余弦的倍角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 90^\circ, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

3. 证明正弦和余弦的半角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 180^\circ, \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

4. 证明正弦和余弦的积化和差公式：

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

5. 证明正弦和余弦的和差化积公式：

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

5. 设平行四边形 $ABCD$ 的相邻两边长为 a, b , 两对角线长为 u, v , 证明： $u^2 + v^2 = 2a^2 + 2b^2$ 。

6. 设 $\triangle ABC$ 三边长分别为 a, b, c , 证明：

$$\sin A = \frac{\sqrt{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{2bc}.$$

7. 设 $\triangle ABC$ 周长的一半为 p , 证明： $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。

8. $\triangle ABC$ 一边的长度是另一边的 2 倍。设 A 是 $\triangle ABC$ 最大的内角，证明： $\cos A \leq 0.25$ 。

3.6 正切函数和余切函数

历史上,除了正弦函数和余弦函数,数学家们还发明了别的函数来讨论角度。**正切函数**和**余切函数**就是两种常用的函数。

如下图,单位圆的切线 l 与锐角 $\angle AOP$ 的终边交于 Q ,定义 $\angle AOP$ 的**正切(值)**为 $\tan \angle AOP = |AQ|$,**余切(值)**为 $\cot \angle AOP = \frac{1}{|AQ|}$ 。也就是说,我们用角截切线的长度来度量角的大小。按照定义,**同角的正切值和余切值互为倒数**。

和正弦、余弦一样,我们可以定义正切、余切函数。要注意的是,正切函数对零角和锐角有定义,但对直角没有定义。余切函数对锐角和直角有定义,对零角没有定义。

不难证明:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

换句话说,可以用锐角的正弦和余弦定义它的正切和余切。不难推出:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

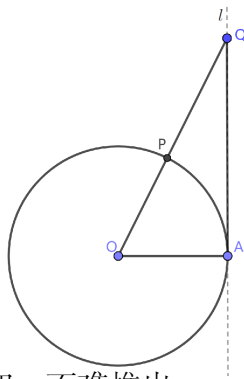
零角的正切是 0,直角的余切是 0。从零角开始,随着角度增大,正切值不断增大。从直角开始随着角度减小,余切值不断减小。 $\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$, 因此 $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$ 。

反过来,也可以用锐角的正切和余切定义它的正弦和余弦:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}}$$

对其他角度,我们保持正切、余切和正弦、余弦的关系,定义

$$\forall \alpha, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



这样，除去分母为零的情况，我们定义了任意角的正切和余切。

从正弦和余弦的和差角公式，可以推出正切和余切的和差角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha, \beta < 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

$$\forall 0 < \alpha, \beta \leq 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ \cot(\alpha - \beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta}\end{aligned}$$

以上关系可以简写为：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}\end{aligned}$$

除去分母为零的情况，任意角的正切和余切也满足以上的和差角公式。

三角形中，内角之和为平角。因此，两角之和的正切值是第三个角正切

值的相反数:

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan(180^\circ - (A + B)) = -\tan(A + B) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}\tan C(1 - \tan A \tan B) &= -\tan A - \tan B, \\ \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C.\end{aligned}$$

定理 3.6.1. 正切定理 三角形内角的正切值之和等于它们的乘积。

正切定理和正弦定理、余弦定理不同。它并不涉及三角形的边,是纯粹关于角的定理。使用正切定理无法解决边角关系的问题,但可以比较方便地给出三角形内角的关系。利用正切和余切的倒数关系,可以写出关于余切的类似结论:

定理 3.6.2. 余切定理 三角形 ABC 内角的余切值满足:

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

习题 3.6.1.

1. 证明正切和余切的倍角公式:

$$\begin{aligned}\forall 0 < \alpha < 45^\circ, \quad \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}\end{aligned}$$

2. 证明正切和余切的半角公式:

$$\begin{aligned}\forall 0 < \alpha < 180^\circ, \quad \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}\end{aligned}$$

定义锐角 α 的**正割值** ($\sec \alpha$) 和**余割值** ($\csc \alpha$):

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

3. 证明: 锐角的正割等于它的余角的余割, 锐角的余割等于它的余角的正割。

4. 证明: $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$, $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$.

5. 证明**万能公式**:

$\forall 0 < \alpha < 180^\circ$, 记 $\tan \frac{\alpha}{2} = t$, 则:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2t}{1+t^2}, & \tan \alpha &= \frac{2t}{1-t^2}, & \sec \alpha &= \frac{1+t^2}{1-t^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \cot \alpha &= \frac{1-t^2}{2t}, & \csc \alpha &= \frac{1+t^2}{2t}. \end{aligned}$$

3.7 多边形的边角关系

多边形的边和角没有直接对应关系。因此, 多边形的边角关系, 要通过对角线来间接建立。比如, 圆内接凸四边形 $ABCD$ 中, 对角之和为平角。根据余弦定理,

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos \angle ABC \\ &= |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD||DC|\cos \angle CDA \end{aligned}$$

于是, 我们得到圆内接凸四边形的内角和四边边长的关系:

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= -\cos \angle CDA = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |CD|^2 - |DA|^2}{2(|AB||BC| + |CD||DA|)}, \\ \cos \angle BCD &= -\cos \angle DAB = \frac{|BC|^2 + |CD|^2 - |DA|^2 - |AB|^2}{2(|BC||CD| + |DA||AB|)}. \end{aligned}$$

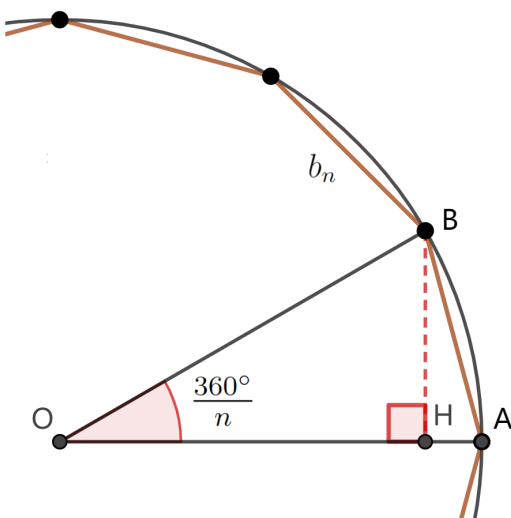
另一个例子是正多边形。设单位圆 O 的内接正 n 边形边长为 b_n , 连接圆心 O 和相邻两顶点 A 、 B , $\triangle OAB$ 是等腰三角形。正 n 边形内角为

$\alpha_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$, 因此 $\angle OAB = -\angle OBA = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{(n-2)90^\circ}{n}$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.
根据正弦定理,

$$\frac{b_n}{\sin \angle AOB} = \frac{1}{\sin \angle OAB}.$$

因此

$$b_n = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\sin \frac{(n-2)90^\circ}{n}} = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\cos \frac{180^\circ}{n}} = \frac{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}}{\cos \frac{180^\circ}{n}} = 2 \sin \frac{180^\circ}{n}.$$



为了方便, 记 $\beta_n = \frac{360^\circ}{n}$, 则 $b_n = 2 \sin \frac{\beta_n}{2}$. 于是, 单位圆内接正 n 边形的周长是 $nb_n = 2n \sin \frac{\beta_n}{2}$.

过 B 作 OA 的垂线, 垂足为 H , 则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|BH|$, 即 $\frac{1}{2} \sin \beta_n$. 因此单位圆内接正 n 边形的面积是 $\frac{n}{2} \sin \beta_n$.

习题 3.7.1.

1. 求单位圆内接正 12 边形的周长。

2. 设圆内接四边形 $ABCD$ 面积为 S , 周长为 $2p$,

2.1. 证明 $S = \frac{1}{2} \sin \angle ABC (|AB||BC| + |CD||DA|)$ 。

2.2. 证明 $S^2 = (p - |AB|)(p - |BC|)(p - |CD|)(p - |DA|)$ 。

2.3. 对一般的四边形 $ABCD$, 如何用 $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|$ 和 $\frac{\angle ABC + \angle CDA}{2}$ 表示它的面积 S ?

第四章 从或许到确定

预测未来，是人类社会的重要活动。合理有效地预测未来，是社会文明进步的标志。中华文明作为农耕文明，很早就懂得预测未来的重要性。历法、史书、节气，都是我们的祖先为了后人更好地预测未来，留下的经验总结。

生产活动中，预测尤其重要。比如，农牧业、渔业、运输业等行业需要预测天气，销售行业需要预测产品的市场需求。科学研究和工程制造中，如果能够提前知道产品在各种各样的情境和场景下的性能，可以节约大量人力物力。社会要发展，就需要更高的预测水平。

4.1 事件和见知

如何判断某件事情将来会不会发生？我们要依赖已有的知识和经验。日常生活中，我们会说“明天大概要下雨”、“今年冬天肯定很冷”、“我明天大概去不了了”。根据已有条件，有些事情必然发生，有些事情或许会发生，有些事情不可能发生。事情发生与否，取决于某些条件。我们把这样的事情叫作**随机事件**，简称**事件**。在已知条件下，如果某事件必然发生，就说它是**必然事件**；如果某事件必然不发生，就说它是**不可能事件**；如果某事件或许会发生，就说它是**或然事件**。数学中，研究这些事情的理论叫作概率论。

概率论假定，我们关心的随机事件有某些恒定的内在规律，受某些固

有未知因素的影响。概率论通过研究这些内在规律和因素，预测事件是否会发生。

如何描述一个事件？从客观的角度，我们可以把“发生一件事”看成事物状态、形势局面的改变。一件事是否发生，可以用改变后的状态或局面表示。我们也许无法确定未来事物发展成哪个状态、形势走向哪个局面，但我们可以事先确定事物未来所有可能的状态、所有可能出现的局面。

比如，我们无法确定明天杭州是否下雨，但我们知道，在明天杭州是否下雨这个问题上，只可能出现两个结果：下雨或不下雨。又比如，我们投一个骰子前，无法确定朝上一面的点数，但我们知道，投出的骰子最终只有六个状态：朝上一面是 1, 2, 3, 4, 5 或 6 点。这些最终状态、局面是互斥的。比如明天杭州不可能既下雨又不下雨，骰子停下之后不可能既是 1 点朝上又是 2 点朝上。

我们把所有可能的最终状态或局面看成一个集合，集合中的每个元素称为事情的**终态或结果**。比如，考虑明天杭州是否下雨这个问题时，所有结果构成 {下雨, 不下雨} 这个集合，每次投骰子时，骰子的终态构成 {1, 2, 3, 4, 5, 6} 这个集合。我们把这个集合叫作**终集**，即终态的全集。我们可以把相关的事件用终集的子集表示。比如，“明天杭州下雨”对应 {下雨} 这个子集，“骰子点数是偶数”对应 {2, 4, 6} 这个子集。事物发展的终态如果在子集里，就说明事件发生了，否则事件没有发生。

单元集也对应着事件。我们把这些事件叫做**基本事件**。**不是任何其他事件的交集的事件，叫做基本事件**。比如 {1} 对应的“骰子点数是 1”就是基本事件。基本事件是各种事件的“基本单元”，它们通过合并形成别的事件。基本事件之间是互斥事件，它们是终集的分划。

终集可以是有限的，也可以是无限的。目前我们只讨论有限的情况。要注意的是，随着问题的条件、环境、思考问题的角度发生变化，终集也会变化。比如，我们考虑明天杭州下雨的问题时，可能要把准备经过杭州的台风“凤凰”也考虑在内。台风“凤凰”也许继续靠近，也许转向。这时，我们

的终集是：

{台风靠近且下雨, 台风靠近且不下雨, 台风转向且下雨, 台风转向且不下雨}

而“明天杭州下雨”对应子集 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}。

对于随机事件，如果我们知道得更多，就能作出更准确的预测。比如，如果我们不知道台风的情况，那么即便我们把终集依照“台风是否继续靠近”划分，我们能把握的也只是 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}、{台风靠近且不下雨, 台风转向且不下雨} 两个事件，与 {下雨}, {不下雨} 并没有不同。如果我们掌握了台风的动向，我们就希望把 {下雨} 分成 {台风靠近且下雨} 和 {台风转向且下雨} 来讨论了。可以说，随着我们对事物、形势的认知增加，我们的终集会越来越“细”。

为了描述认知增加的过程，我们从最“细”的终集出发，定义每个阶段的**知集**，代替不同阶段的终集。知集是最“细”终集的子集构成的集合，满足：

1. 空集属于知集；
2. 如果集合 A 属于知集，那么 A 的补集也属于知集；
3. 如果集合 A 和 B 属于知集，那么它们的交集和并集也属于知集。

知集表示我们每个阶段的认知。我们根据当前的认知来讨论各种事件。比如，在杭州下雨的例子中，可以有两个知集，分别是：

$$S_1 = \{\emptyset, \{AR, DR\}, \{AN, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

和

$$S_2 = \{\emptyset, \{AR\}, \{AN\}, \{DR\}, \{DN\}, \{AR, AN\}, \{AR, DR\}, \{AR, DN\}, \\ \{AN, DR\}, \{DN, AN\}, \{DR, DN\}, \{AR, AN, DR\}, \{AR, AN, DN\}, \\ \{AR, DR, DN\}, \{AN, DR, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

其中 AR, AN, DR, DN 分别表示“台风靠近且下雨”、“台风靠近且不下雨”、“台风转向且下雨”和“台风转向且不下雨”。可以看出, S_1 是 S_2 的子集。 S_1 到 S_2 的过程, 就是对台风认知加深的过程。

这种描述下, 不同的知集就对应不同“粗细”的终集。每个知集都对应自己的基本事件。这时候的基本事件不一定是单元集。比如, $\{AR, DR\}$ 在 S_1 中是基本事件, 在 S_2 中就不是基本事件了。

习题 4.1.1. 写出以下问题的终集和知集。

1. 我国朱鹮从东北省份向南迁徙的路线有三条: 西线、中线和东北线。小明想知道黑龙江省的某只朱鹮沿哪条路线南迁。

2. 某航空公司规定: 作为补偿, 飞机晚点一小时以上, 返还全票票价的 40%; 如果晚点三小时以上, 返还全票票价的 75%。乘客实际购票价低于前述返还价格的, 返还乘客实际购票价。航班因晚点取消, 且乘客自愿接受转乘下一班机的, 公司协助补票, 实施“就低返利”政策: 按照下一班机实时票价和乘客最初购票价的较低者计算新票价, 多则退还差价; 并另外补偿新票价的 30%。某乘客购票后, 在候机时被告知飞机可能晚点, 他试着分析可能得到的晚点补偿。

4.2 概率和分布

预测随机事件时, 我们除了关心会发生什么事情, 还关心事情有多大可能发生。当我们说“这事百分之百能成”, “他八成还在路上”, “他的话只有三分准头”, 我们认为某些事情比另一些事情更可能发生。习惯上, 我们用数来描述事情多么有可能发生。在数学中, 我们把这个做法称为**事件的概率**。

我们用不大于 1 的非负实数表示事件的概率。约定不可能事件的概率是 0, 必然事件的概率是 1, 事件的概率越大, 越有可能发生。此外, 事件的概率应当和事件之间的关系相符。两个互斥事件同时发生的概率应该是

0, 至少有一个发生的概率应该是它俩概率的和。

用集合的语言来说, 空集的概率应该是 0, 终集 (全集) 的概率应该是 1; 两个集合不相交, 那么它们的并集的概率等于它们概率的和。

我们习惯用映射 $\mathbb{P}$ 来记录概率, 把事件 A 的概率记为 $\mathbb{P}(A)$ 。比如, “明天八成会下雨”, 可以写成 $\mathbb{P}(\{\text{明天下雨}\}) = 0.8$ 。不至于混淆时, 也可以省略表示集合的大括号, 写成: $\mathbb{P}(\text{明天下雨}) = 0.8$ 。

一般来说, 两个事件互斥时, 对应的集合不相交, 它们的概率之和等于它们的并集的概率。比如, 两个事件对立, 概率之和就是全集的概率, 也就是 1:

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$$

基本事件两两互斥, 并集是终集 (全集)。所以, 基本事件的概率之和等于 1。

举例来说, 投骰子的时候, 我们一般认为投出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的可能性都一样大, 即每个基本事件的概率都相等。于是它们各自的概率是六分之一。据此, 可以算出任何事件的概率。比如, “投出 5 点或以上” 的概率是 “投出 5 点” 的概率加上 “投出 6 点” 的概率, 也就是三分之一。如果我们知道骰子有问题, 比如投出 6 点的可能性是其他任一点数的 2 倍, 那么 “投出 6 点” 的概率是七分之二; 投出其他点数, 比如 “投出 3 点” 的概率是七分之一; 而 “投出 5 点或以上” 的概率是七分之三。

终集是有限集合的时候, 只要知道了知集中每个基本事件分配到的概率 (称为**概率分布**), 就可以推出知集里其他事件的概率。

如果某些事件 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 两两互斥, 那么它们和另一事件的交集也两两互斥。因此, 设 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 的并集为 B , 则这些交集的概率之和等于它们的并集, 也就是 $A \cap B$ 的概率:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_k)$$

如果并集 B 是全集，那么 $A \cap B = A$ ，上式变成：

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap B_k)$$

也就是说，如果某个问题中，我们不重复也不遗漏地列举了若干种情况，那么任何事件的概率，都等于该事件分别在这些情况下发生的概率之和。比如说，我们知道明天杭州要么下雨，要么不下雨。因此，事件“明天杭州气温低于 10 摄氏度”的概率等于“明天杭州下雨且气温低于 10 摄氏度”的概率与“明天杭州不下雨且气温低于 10 摄氏度”的概率之和。

两个事件 A, B 有交集时，可以考虑它们各自减去交集剩下的部分，分别记为 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 。 $A \setminus B$ 就是属于 A 但不属于 B 的终态的集合， $B \setminus A$ 就是属于 B 但不属于 A 的终态的集合。集合 $A \setminus B$ 、 $B \setminus A$ 、 $A \cap B$ 两两不相交，它们的并集是 $A \cup B$ 。因此，

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

另一方面，由于 $A \setminus B$ 和 $A \cap B$ 不相交，并集为 A ，所以 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$ ；同理 $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$ 。带入上面的式子，就得到：

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

这个关系和容斥原理的形式是一样的。

思考 4.2.1.

1. 同一个终集下的不同知集中，同一个事件的概率是否相同？
2. 事件的概率和集合的元素个数有什么关系？为什么有这样的关系？

4.3 二项分布和均匀分布

我们来看两种简单的概率分布。

考虑只有两个终态 a, b 的终集，两个基本事件 $\{a\}, \{b\}$ 概率之和是 1。设其中一个的概率是 p ，则另一个的概率是 $1 - p$ 。我们把这样的概率分布叫作**二项分布**。举例来说，如果我们认为明天杭州下雨的概率是 0.7，不下雨的概率就是 $1 - 0.7 = 0.3$ 。我们说，我们认为明天杭州下雨的问题服从二项分布。

又比如：抛一枚硬币，我们认为正面朝上的概率是 0.52，那么反面朝上的概率就是 $1 - 0.52 = 0.48$ 。我们说，我们认为抛这枚硬币的问题服从二项分布。为了好说话，我们会在两个基本事件中选一个我们更关心的，称为**正面事件**，把另一个称作**反面事件**。如果正面事件的概率是 p ，就说问题服从系数为 p 的二项分布。

终集为 $\{a, b\}$ 的二项分布，包括四个事件，分别对应 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ 四个子集。设 $\{a\}$ 是正面事件，概率为 p ，那么这四个事件的概率分别是 0、 p 、 $1 - p$ 和 1。

对于元素更多的终集，情况更加复杂。我们考虑一种简单情形：每个基本事件的概率相等。这样的概率分布称为**等概率分布**或**均匀分布**。比如，投骰子时，如果我们认为每面朝上的概率都相等，就说投骰子服从均匀分布。

假设终集有 n 个终态，那么每个基本事件的概率就是 $\frac{1}{n}$ 。对于任意事件，我们可以数一下事件包含了几个终态，用终态个数除以所有终态的个数，就是它的概率。我们把这个性质写作：

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

其中 $|A|$ 表示事件 A 作为集合的元素个数， $|S|$ 表示终集 S 的元素个数。比如，服从均匀分布的投骰子问题中，要求“大于 2 点”的概率，我们数一下事件 $\{3, 4, 5, 6\}$ ，它包含了 4 个终态，所以“大于 2 点”的概率是 $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 。

习题 4.3.1.

1. 把 1 到 100 分别写在小纸条上放入黑箱里，随意抽取一张，抽到的数是素数的概率是多少？完全平方数的概率是多少？各位数字乘积大于 10

的概率是多少?

2. 有没有以全体自然数为终集的均匀分布? 为什么? 说说你的理由。

3. 一个正方体的木块表面上涂成蓝色, 然后被均匀地切成 1000 个小正方块。从中随机抽出一块, 恰有两面是蓝色的概率是多少?

4.4 排列和组合

均匀分布的问题里, 事件的概率只和它包含的终态的个数以及所有终态的个数有关。因此, 在相关的一些问题里, 我们关心如何计出事件包含的终态的个数。

例子 4.4.1. 将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一列, 最左边的球是 1 的概率是多少?

这里我们假设各种排列是等概率分布的。在这样一个均匀分布的问题里, 要知道事件“最左边的球是 1”的概率, 就用“最左边的球是 1”包含的终态个数除以所有终态的个数。那么, 怎么计算“最左边的球是 1”包含的终态个数和所有终态的个数呢?

首先考虑所有终态的个数: 将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一列, 有多少种方法?

不妨设三个球从左到右排列。无论排列方式如何, 三个球分别占据“左”、“中”、“右”三个位置。从左边开始, 把球一个个放到位置上。左边的位置可以放三个球中任何一个, 因此有 3 种方法。按任一种方法放好左边的球以后, 中间的位置可以放剩余两个球中任何一个, 因此有 2 种方法。按任一种方法放好中间的球以后, 右边的位置可以放最后一个球, 只有 1 种方法。于是一共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种方法。

如果最左边的球是 1, 有多少种方法? 这时左边的位置已经放好了 1 号球, 因此中间的位置还有两种放法。任一种方法放好中间的球以后, 右边的

位置放最后一个球，只有 1 种方法。因此，一共有 $2 \times 1 = 2$ 种方法。

综上所述，“最左边的球是 1” 的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

我们把 n 个互不相同的物品排成一系列的方法数目称为 n **排列数**，记作 P_n 。比如，编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一系列的方法数目就叫做 “3 排列数”，记作 P_3 。

对于一般的自然数 n ， n 排列数是 $n-1$ 排列数的 n 倍。这是因为，如果把 n 个互不相同的物品排成一系列，第一个位置总可以放 n 个物品中的任何一个，有 n 种方法。按任一种方法放好第一个位置后，剩下的 $n-1$ 个位置摆放剩下的 $n-1$ 个物品的方法数目，恰好就是 $n-1$ 排列数。

因此，用归纳法可以证明， n 排列数就是 n 乘以 $n-1$ 乘以 $n-2 \cdots$ 直到乘以 1 的乘积。比如，5 排列数就是 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 。

如果我们把从 n 乘到 1 的计算看成关于 n 的函数的话，这个函数叫做 (n 的) **阶乘**，记作 $n!$ 。 n 排列数就是 n 的阶乘。

如果要求从 n 个互不相同的物品中选 m 个排成一系列，那么按同样的思路，摆放的方法数为：

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1).$$

我们把它称为 n **选 m 排列数**，记作 P_n^m 。显然， P_n^n 就是 P_n 。我们可以用阶乘来表示 P_n^m ：

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例子 4.4.2. 将 3 个红球和 2 个白球组成一系列，最左边的球是红球的概率是多少？

我们仍然先计算 3 个红球和 2 个白球组成一系列的方法数。这里球只有红白两种颜色的分别。同色的球没有差别。如果我们把球编号，1, 2, 3 号球

是红球, 4, 5 号球是白球, 那么, 按照编号排列, 有 $5! = 120$ 种方法。不过, ①②③④⑤和②③①④⑤其实是同一种方法。因为 1, 2, 3 号球都是红球, 怎么排列都没有差别。同理, ①②③⑤④和①②③④⑤也没有差别。3 个红球的排列方法有 $3! = 6$ 种, 2 个白球的排列方法有 $2! = 2$ 种, 于是这 $6 \times 2 = 12$ 种方法都对应同一种结果。也就是说, 带编号的 12 个排列方法对应一种不带编号的排列方法。因此, 实际上只有 $\frac{5!}{3!2!} = 10$ 种排列方法。

我们把不带编号的排列方法称为**组合数**。比如, 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目叫做 (3, 2) 组合数或 5 选 3 组合数 (因为也可以看作从 5 个位置里选 3 个放红球), 记作 C_5^3 或 $\binom{3}{5}$ 。

如果最左边的球是红球, 那么剩下的 4 个位置要放 2 个红球、2 个白球。于是, 一共有 C_4^2 种方法。计算可知:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6.$$

即一共有 6 种方法。因此最左边的球是红球的概率是:

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是红球}) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

一般来说, n 选 m 组合数也可以用阶乘计算:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

不难发现, C_n^m 和 P_n^m 有以下关系:

$$P_n^m = m! \cdot C_n^m.$$

容易发现: n 选 m 组合数等于 n 选 $n-m$ 组合数。比如, 5 选 3 组合数等于 5 选 2 组合数。用红球和白球的例子, 可以理解为: 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目, 等于 3 个白球和 2 个红球组成一列的方法数目。

掌握了排列数和组合数, 我们就可以计算一些复杂问题里终态的个数。

例题 4.4.1. 4 个红球和 2 个白球排成一行，有多少种方法？

解答. 一共有 6 个球，其中 4 个红球和 2 个白球，因此方法数为 6 选 4 组合数：

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15.$$

一共有 15 种方法。

例题 4.4.2. 足球联赛有 20 只球队，随机分为两个组，每组 10 只球队相互比赛，最后各组得分最高者进入决赛。求其中甲、乙两队被分在不同组的概率。

解答. 依题设，把 20 只球队分为两组，每组 10 只球队，每一种分法的概率相等。我们分别计算甲、乙两队同组以及甲、乙两队不同组的分法数，不同组分法数与总分法数之比为不同组的概率。

首先计算两队同组的分法数。这时需要在剩余 18 只球队中再选 8 只球队与甲、乙同组，其余为另一组。因此一共有 C_{18}^8 种分法。

再计算两队不同组的分法数。这时需要在剩余 18 只球队中再选 9 只球队与甲队同组，而其余的就和乙队同组。因此一共有 C_{18}^9 种分法。

于是同组概率为：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{甲乙不同组}) &= \frac{C_{18}^9}{C_{18}^9 + C_{18}^8} = \frac{\frac{18!}{9!9!}}{\frac{18!}{9!9!} + \frac{18!}{8!10!}} \\ &= \frac{8! \cdot 10!}{8! \cdot 10! + 9! \cdot 9!} = \frac{10!}{10! + 9 \cdot 9!} = \frac{10}{10 + 9} \\ &= \frac{10}{19}. \end{aligned}$$

更简单的思考方法：我们把甲队放在某组，然后剩下同组 9 个位置和另一组 10 个位置。乙队落入各个位置的概率是均等的。把乙队随机放入其中一个位置，那么乙队落入另一组 10 个位置的概率为 $\frac{10}{19}$ 。这里我们能够凭直觉判断出：乙队落入各个位置的概率是相等的。但在一些更复杂的情况下，我们仍然需要谨慎验证。

例题 4.4.3. 把 10 个相同的球分给甲、乙、丙、丁四人，每人至少有一个球，一共有几种分法？

解答. 考虑这样的实验：把球从左到右排成一排，用 6 块黑色和 3 块白色的挡板将相邻的球隔开。然后把黑色隔板拿走，只剩下白色隔板。把被隔开的球按左中右顺序分给甲、乙、丙、丁四人。不难看出，每种放隔板的方法恰好对应一种分球的办法。

因此，只需要计算有几种放隔板的方法。不考虑球的话，等于求 6 块黑隔板和 3 块白隔板的排列方法，因此方法数为 9 选 3 组合数：

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

一共有 84 种方法。

例题 4.4.4. 盒子里有 100 枚螺丝，其中 10 枚是次品，其余是良品。从中抽取 10 枚都是良品的概率是多少？

解答. 要注意良品与良品、次品与次品并不做区分。我们可以把抽取的动作看作盒内外有 100 个位置供次品放置，其中 10 个在盒外（被抽出的）。不作限制的话，次品可以放在任何位置。如果要求抽取的 10 枚都是良品，等于限制次品只能放在另外 90 个位置。因此，所求概率为：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(10 \text{枚都是良品}) &= \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} = \frac{\frac{90!}{80! \cdot 10!}}{\frac{100!}{90! \cdot 10!}} \\ &= \frac{90! \cdot 90!}{80! \cdot 100!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91} \\ &\approx 0.3305 \end{aligned}$$

10 枚都是良品的概率约为 33.05%。

习题 4.4.1.

1. 5 个红球和 3 个白球排成一行，有多少种方法？
2. 2 个红球、3 个白球和 2 个黄球排成一行，有多少种方法？

3. 4 个男孩和 3 个女孩排成一排，男女相间排列的方法有几种？
4. 袋子里有 5 个白球，7 个红球。从中随机抽出两个球，一白一红的概率是多少？都是白色（红色）的概率是多少？
5. 一共有 100 个灯泡，其中有 10 个次品。从中随机抽取 10 个检验，发现有 2 个次品的概率是多少？
6. 设有两个正整数 $m < n$ ，证明： $m!$ 整除 $n!$ 。

第五章 多元命题与多元映射

作为中学数学的基础，我们很早就学习了判断和命题，命题就是包含判断的语句。至今为止，我们已经接触了大量的判断和命题，学会了运用不少相关的规律。

我们使用集合和映射来理解判断和命题。要讨论判断，理解判断关心的对象是什么，在什么范围内讨论，是很有必要的。这就要用到集合的概念。明确了判断关心的对象在哪个集合里，我们针对哪个集合的对象展开讨论，才能把道理说清楚。举例来说，常有人动辄说“中国人如何如何”、“青少年如何如何”，实际上他谈论的仅仅是自己生活中接触过的人，能够讨论、判断的对象也仅限于此。有些人讨论问题时说“这是本校独有的问题”、“这不过是某某的问题”，实际上问题也许存在于更广泛的群体中。不加思索地把讨论范围扩大到“全体中国人”、“全体青少年”，又或者把范围缩小到“本校”、“某几个人”，就是犯了不当选取全集的错误，容易造成“以偏概全”或“选择性批判”的后果。

映射表示事物之间的对应关系。判断也是一种映射，将对象集合 S 的元素对应到 {真, 假} 这个集合里。为了清晰地讨论这样的判断，在数学领域，我们会指定一个变量 x ，它在 S 中取值，并影响我们谈论的判断 P 。因此， P 就是关于 x 的映射。举例来说，在“所有自然数都是偶数”是，我们谈论的判断 P 是关于某个在 $\mathbb{N}$ 中取值的变量 x 的判断“ $P(x)$: x 是偶数”。指定了 x ， $P(x)$ 要么是“真”，要么是“假”。同时，我们也在谈论“所有

自然数都是偶数”这个判断。它是一个全判断，是所有 $P(x)$ 的判断的联言判断。它是真的，当且仅当所有 $P(x)$ 都为真。

我们所见的命题，大多是对单个变量的判断。比如，当我们说“所有自然数都是整数”时，我们会讨论自然数集中的变量 x ，并说 $\forall x \in \mathbb{N}$, x 是整数。 x 这个变量在 $\mathbb{N}$ 中取值，在 $\mathbb{N}$ 中变化。但也有对多个变量的判断。比如，我们说“某班的所有男生都比女生高”时，可以理解为把“某班的男生”这个集合里的元素 x 拿出来和“某班的女生”这个集合里的元素 y 拿出来比较。 x, y 这两个变量分别在不同的集合里变化。显然，涉及多个变量的问题，讨论起来比单变量的问题更复杂。接下来我们就来研究关于多个变量的判断和命题。

5.1 映射与多元映射

判断是一种映射，因此，研究涉及多变量的判断，就要理解相应的映射。一个映射涉及两个集合：出发集和到达集。至今为止，我们接触的映射，都是把出发集里的一个元素对应到到达集里的一个元素。除了这种对应方式，现实生活中还有别的对应方式。

例子 5.1.1.

1. 某公司希望清点各个门店过去一年各个月份的销售额。

门店	月份	销售额
大连 01	1	¥ 121902.54
上海 03	4	¥ 204361.08
武汉 01	2	¥ 194720.10
⋮	⋮	⋮

2. 某次全市联考的名册。

学校	班级	姓名	准考证号
立德中学	初三 (1) 班	张三	A00281
师大附中	初三 (6) 班	李四	A00916
第六中学	初三 (3) 班	王五	F00045
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

第一个例子里，我们可以建立这样的对应关系：

$$\begin{aligned}
 f : \text{门店} \times \text{月份} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
 f(\text{大连01}, 1) &= 121902.54, \\
 f(\text{上海03}, 4) &= 204361.08, \\
 f(\text{武汉01}, 2) &= 194720.10, \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

第二个例子里，我们可以建立这样的对应关系：

$$\begin{aligned}
 f : \text{学校} \times \text{班级} \times \text{姓名} &\rightarrow \text{准考证号} \\
 f(\text{立德中学}, \text{初三 (1) 班}, \text{张三}) &= A00281, \\
 f(\text{师大附中}, \text{初三 (6) 班}, \text{李四}) &= A00916, \\
 f(\text{第六中学}, \text{初三 (3) 班}, \text{王五}) &= F00045, \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

从多个出发集中各取一个元素，与到达集里的一个元素对应。这样的对应关系叫做**多元映射**。它把多个元素对应到一个元素。为了区别，我们把一个元素对应到一个元素的对应关系叫做**一元映射**。事实上，多元映射也可以看作一种特殊的一元映射，但在这个阶段我们不讨论这个问题，姑且认为它们是有区别的。以下提到“映射”，如果不特别指出，一般指一元映射。

多元映射也和映射一样，有自变量和应变量。多元映射的自变量是多个集合中的元素按顺序组成的，称为**有序元组**。比如，第一个例子中，自变

量 (大连01, 1) 就是由门店集合的元素“大连 01”和月份集合的元素“1”构成的有序二元组。第二个例子中, 自变量 (师大附中, 初三 (6) 班, 李四) 就是由校名集合的元素“师大附中”、班级集合的元素“初三 (6) 班”和姓名集合的元素“李四”构成的有序三元组。

再来看一个数学中的例子:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

这个映射把实数 x, y 映射为 $x^2 + y^2$ 。比如, 我们令 $x = 3, y = 1$, 就得到: $f(x, y) = 3^2 + 1^2 = 10$ 。

出发集和到达集都是数集的映射, 叫做函数。多元映射也如此。出发集和到达集都是数集的多元映射, 叫做**多元函数**。以上的 f 就是二元函数。

再来看以下关于判断的多元映射:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \{\text{真}, \text{假}\} \\ (n, m) &\mapsto \text{若 } n > 1, \text{ 则 } n^2 < m^3 < 2n^2 + 1. \end{aligned}$$

对任何自然数 n, m , f 将它们映射到假言判断 $P(n, m)$: “若 $n > 1$, 则 $n^2 < m^3 < 2n^2 + 1$ ”。对某些 (n, m) , $P(n, m)$ 为真, 对另一些 (n, m) , $P(n, m)$ 为假。这样含有两个变量的判断 $P(n, m)$ 称为**二元判断**, 叙述二元判断的语句称为**二元命题**。

习题 5.1.1.

1. 将加减乘除表示为多元函数。
2. 将正弦、余弦函数的和差角公式表示为多元函数。
3. 考虑将三角形顶点对应到它的重心的多元映射。如何在直角坐标系中把这个映射表示为多元函数?

多元映射比映射更复杂, 涉及到更多的集合, 因此, 我们希望通过映射来理解多元映射。

给定一个二元映射 $f : S_1 \times S_2 \rightarrow S_3$, 如果只考虑 S_1 中的一个元素 a , 那么

$$g_2 : t \mapsto f(a, t)$$

就是一个映射。同理, 如果只考虑 S_2 中的一个元素 b , 那么

$$g_1 : t \mapsto f(t, b)$$

也是一个映射。这两个映射都是根据 f 定义的。很多时候, 为了研究二元映射 f , 我们会先研究 g_1 和 g_2 , 它们比原来的二元映射更简单, 只涉及一个自变量, 更方便研究。这种方法称为**固定变量法**。

比如, 要研究关于实数 x, y 的二元函数 $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x+y}$, 我们可以先让 x 等于某个定值 a , 研究函数 $g_1 : t \mapsto f(a, t) = \frac{at}{a+t}$ 。可以把 g_1 的表达式改写为

$$g_1(t) = a - \frac{a^2}{a+t}.$$

$a = 0$ 的时候, $g_1(t) = 0$ 总成立。 $a > 0$ 的时候, $g_1(0) = 0$, 当 t 从 0 开始不断变大, 正数 $a+t$ 越来越大, 于是正数 $\frac{a^2}{a+t}$ 越来越小。 $g_1(t)$ 随着 t 不断变大, 逐渐从 0 变大, 往 a 靠拢。可以看到, 随着我们对不同的 a 对应的函数 g_1 做出分析, 我们对二元函数 f 的了解就不断增加。

除了让自变量中的某个元素等于定值, 我们还可以施加其它条件, 把多元映射转化为映射。比如, 对以上的二元函数 f , 我们可以让 x 和 y 的和等于定值 a , 研究函数

$$g : t \mapsto f(t, a-t) = \frac{t(a-t)}{a} = -\frac{t^2}{a} + t$$

g 是一个二次函数, 最高次项是 $-\frac{1}{a}$ 。 $a > 0$ 时, 最高次项系数小于 0, 函数图像关于 $x = \frac{a}{2}$ 对称, 最高点是 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$; $a < 0$ 时, 最高次项系数大于 0, 函数图像关于 $x = \frac{a}{2}$ 对称, 最低点是 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$ 。

习题 5.1.2.

1. 给定关于实数 x, y 的二元函数 $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{xy}$ 。当 x 为定值 a

时, 研究对应函数的性质。

2. 给定关于实数 x, y 的二元函数 $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{xy}$ 。当 $x + y$ 为定值 a 时, 研究对应函数的性质。

3. 给定源于实数 x, y, z 的三元函数 $f : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx - x^2$, 研究这个函数的性质。

5.2 二元命题

二元命题就是包含关于两个变量的判断的语句。其中, 每个变量之前都可以有一个限定词, 说明它是全判断还是有判断。这个词称为**辖词**, 表示我们如何“管辖”变量。举例来说, 命题“没有最大的素数”可以“翻译”成二元命题:

对任意素数 p , 都有素数 q , 使得 $q > p$ 成立。

其中 $P(p, q) : q > p$ 是二元判断, 而前面的“对任意的素数 p , 都有素数 q ”是对 p, q 的范围和关系的说明。“任意素数”代表范围是所有素数集合 S 的全判断, “有素数”代表范围是集合 S 的有判断。“任意”和“有”是辖词, S 是它们的**辖域**。用符号可记为:

$$\forall p \in S, (\exists q \in S, \text{使得 } P(p, q) : q > p \text{ 成立})$$

为了表述简洁, 在不至于混淆的情况下, 我们往往省略括号乃至里面的“使得”、“成立”, 记为:

$$\forall p \in S \exists q \in S, q > p.$$

如果我们想表达“恰有一个(这样的) q ”, 可以把 $\exists$ 符号改为 $\exists!$ 。

$P(p, q)$ 关于两个变量都可能是有判断或全判断, 所以上面这种二元命

题一共有四类，分别可以记为：

$$\forall p \in X (\forall q \in Y, P(p, q)).$$

$$\exists p \in X (\exists q \in Y, P(p, q)).$$

$$\exists p \in X (\forall q \in Y, P(p, q)).$$

$$\forall p \in X (\exists q \in Y, P(p, q)).$$

和用纵横的数轴建立平面坐标系一样，我们用纵横表格来罗列它们的变量涉及的情况。

先来看一个例子：

任意小于 40 的素数除以 4 余 1。

我们可以把这个命题转为二元命题：

$$\forall p \in S_1, (\exists k \in S_2, \text{使得 } p = 4 \times k + 1).$$

其中 $P(p, k) : p = 4k + 1$ 依赖变量 p, k , p 所处的集合 S_1 是

$$S_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ 是素数, 且 } x < 40\}.$$

k 所处的集合是 $\mathbb{N}$ ，但在这里由于我们知道 $P(p, k)$ 的内容，我们可以事先将它缩小到

$$S_2 = \llbracket 1, 10 \rrbracket.$$

因为 $k > 10$ 时， $4k + 1$ 就肯定不在 S_1 中了。

S_1, S_2 都是有限集合，我们可以把它们的元素写出来：

$$S_1 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\},$$

$$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

我们来绘制一个纵横表格，横向排出 S_1 中元素，纵向列出 S_2 中元素。如果第 i 行元素 k 和第 j 列元素 p 使得 $P(p, k)$ 为真，就在第 i 行第 j 列标上“真”，否则标上“假”。于是得到以下表格：

$k \backslash p$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
1	假	假	真	假	假	假	假	假	假	假	假	假
2	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假
3	假	假	假	假	假	真	假	假	假	假	假	假
4	假	假	假	假	假	假	真	假	假	假	假	假
5	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假
6	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假
7	假	假	假	假	假	假	假	假	真	假	假	假
8	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假
9	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	真
10	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假

素数 p 是否是 k 的 4 倍加 1

观察表格，我们对所有需要考虑的 $P(p, k)$ 一目了然。对某些素数 p ，可以找到 k 使得 $P(p, k)$ 成立，对某些 p 则不然。

要注意的是，一般的二元命题涉及的集合 S_1, S_2 未必是数集，也不一定可以（按某种顺序）排列。我们使用纵横表格的目的是方便理解和讨论，但并不表示表格必然存在，或表格的内容与命题有固定的对应或规律。纵横表格可以起到辅助理解和启发思考的作用，但关于命题的最终结论应该建立在严谨的推理之上。

比如，命题“没有最大的素数”可以转为二元命题，但我们无法把相应的变量集合确定为有限集合。我们仍然可以画出类似的表格，包括较小的素数，但这个表格的“整体”可能是无穷的，我们只能画出部分。

$p \backslash q$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	...
2	假	真	真	真	真	真	真	真	真	真	真	真	
3	假	假	真	真	真	真	真	真	真	真	真	真	
5	假	假	假	真	真	真	真	真	真	真	真	真	
7	假	假	假	假	真	真	真	真	真	真	真	真	
11	假	假	假	假	假	真	真	真	真	真	真	真	

$\begin{smallmatrix} q \\ \backslash p \end{smallmatrix}$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	...
13	假	假	假	假	假	假	真	真	真	真	真	真	
17	假	假	假	假	假	假	假	真	真	真	真	真	
19	假	假	假	假	假	假	假	假	真	真	真	真	
23	假	假	假	假	假	假	假	假	假	真	真	真	
29	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	真	真	
31	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	真	
37	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	假	
$\vdots$													

素数 q 是否大于素数 p

5.3 “有求必允”与“一路全真”

如何通过纵横表格理解二元命题呢？我们注意到以上四类二元命题可以分为两层，每层都使用一个辖词规定命题关于其中一个变量是全判断还是有判断。比如，命题 $\forall p \in S (\exists q \in S, P(p, q))$ 里，外层是关于变量 p 的全判断，内层（括号中）是关于 q 的有判断。我们约定，以下在纵横表格中总把外层 p 的值纵向排列，把内层 q 的值横向排列，那么每一行对应关于 p 的某个取值 p_0 的一个判断 $\exists q \in S, P(p_0, q)$ 。这个判断涉及到该行各列的 q 值，但 $p = p_0$ 是固定的。而该行的每个格子对应关于 q 的某个取值 q_0 的判断。

比如，在上面“素数 q 大于素数 p ”的表格中，第 2 行就是关于 $p = 3$ 的判断 $\exists q \in S, q > 3$ 。而第 2 行第 5 列就是关于 $q = 11$ 的判断 $11 > 3$ 。

前面提到，对于二元映射，我们可以使用固定变量法，将其中一个变量设为定值，将它变成一元映射来理解。对二元命题，我们也可以采取同样的方法，先让其中一个变量等于某个定值，这样二元命题就变成了含有一个变量的命题。对应到纵横表格里，就是一行行来考察。固定 $p = p_0$ ，就是找到对应的行。这一行的真值就让我们知道内层命题的真假。如果内层命题是有判断，那么该行只需要有一个格子是真，命题就是真的；只有当该行所

有格子都是假，命题才是假的。如果内层命题是全判断，那么只有该行所有各自都真，内层命题才是真的；只要该行有一个格子是假的，内层命题就是假的。

获得了每行对应的内层命题的真假后，我们再变化 p 的值，查看对各个 p 值，相应的内层命题，来最终确定外层命题的真假。如果外层命题是有判断，那么只要有一行的内层命题为真，整个命题就是真的；只有当所有行的内层命题都是假的，整个命题才是假的。如果外层命题是全判断，那么只有当所有行的内层命题都是真的，整个命题才是真的；只要有一行的内层命题是假的，整个命题就是假的。

以上提到的四类二元命题，有两种是较容易理解的，分别是两个辖词都为 $\forall$ 和两个辖词都为 $\exists$ 的情况。为了好说话，我们将这四类命题按辖词的位置分别称为 $\forall\forall$ 类、 $\exists\exists$ 类、 $\forall\exists$ 类和 $\exists\forall$ 类。首先来看 $\forall\forall$ 类，也就是两个辖词都为 $\forall$ 的情况。这时外层命题和内层命题都是全判断。因此，对每个固定的 p 值，我们都要求该行全部格子都是真的，内层命题才是真的。同样，必须所有行的内层命题都为真，整个命题才是真的。这说明，只有当所有的格子都是真的，整个命题才是真的。但凡有一格的值为假（即只要有任意一个 p_0, q_0 导致命题 $P(p_0, q_0)$ 为假），整个命题就是假的。这种情形类似于全判断的联言判断。

再来看 $\exists\exists$ 类。这时外层命题和内层命题都是有判断。因此，只需找到某一行的内层命题为真就可以了。而要使这行内层命题为真，又只需要有一格的值为真就可以了。这说明，只要整个表格里有一格的值是真实的，整个命题就是真的；只有当所有格子都假，整个命题才是假的。这种情形类似于有判断的有言判断。

不难发现，这两类命题是对立的。说“ $\forall p \in S \forall q \in S, P(p, q)$ 为真”，就等于否定“ $\exists p \in S \exists q \in S, P(p, q)$ 为假”。反之亦然。

和这两类情况相比， $\forall\exists$ 类和 $\exists\forall$ 类的情况更复杂。我们先看具体的例子。比如，要研究关于正整数 n, m 的二元命题：

$$P(n, m): m + n \text{ 整除 } m^2 - n^2.$$

我们可以让 n 等于定值 3, 研究关于变量 m 的命题 $Q(m) = P(3, m)$ 。如果 $Q(m)$ 对所有正整数 m 为真, 那么我们可以说:

存在正整数 n , 使得对所有自然数 m , $P(n, m)$ 为真。

显然, 如果 n 取某个定值的时候, 考虑关于变量 m 的命题 $Q(m) = P(n, m)$ 。如果对所有正整数 m , $Q(m)$ 都是真命题, 那么以上这句话也成立。于是命题可以简记为:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+, \text{ 使得 } \forall m \in \mathbb{N}, \text{ 都有 } P(n, m).$$

。它对应 $\exists\forall$ 类命题。我们用纵横表格来表示这个结论。

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1											
2											
3	真	真	真	真	真	真	真	真	真	真	
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
$\vdots$											

$P(n, m)$ 对 $n = 3$ 一路为真

可以看到, “存在正整数 n , 使得对所有正整数 m , $P(n, m)$ 为真 (假)”, 说明表格中有一行的值全是真 (假)。我们把这种性质称为“一路全真 (假)”。

$\forall\exists$ 类的“样貌”可能更不规则。比如这个关于正整数 n, m 的命题 $P(n, m): n < m^2 \leq 3n+1$ 。正整数 n 是定值的时候, 考虑 $P_1: m \mapsto P(n, m)$, $P_1(m)$ 只对一部分自然数为真。但我们可以说,

对任意正整数 n , 总有正整数 m , 使得 $P(n, m)$ 为真。

比如, $n = 10$ 的时候, 让 $m = 5$, 则 $n < m^2 \leq 3n + 1$; $n = 100$ 的时候, 让 $m = 16$, 则 $n < m^2 \leq 3n + 1$ 。一般来说, 对给定的正整数 n , 让 m 等于大于 $\sqrt{n}$ 的最小整数, 就能使 $P_1(m)$ 为真。这个命题可以简记为:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \exists m \in \mathbb{Z}^+, \text{使得 } P(n, m).$$

用纵横表格来表示这个结论:

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	假	假	真	假	假	假	假	假	假	假	
2	假	假	假	假	假	假	假	假	真	假	
3	假	假	假	真	假	假	真	假	假	假	
4	假	假	真	假	假	假	假	假	假	假	
5	假	假	真	假	假	假	假	真	假	假	
6	真	假	假	假	假	假	真	假	假	假	
7	假	假	假	假	真	假	假	假	假	假	
8	假	假	假	假	假	假	真	假	假	假	
9	假	假	假	真	假	假	假	假	假	假	
10	假	假	真	假	假	假	假	假	假	假	
$\vdots$											

$P(n, m)$ 对 n 有求必允

可以看到, “对任意正整数 n , 总有正整数 m , 使得 $P(n, m)$ 为真”, 说明表格里每一行都至少有一个值为真, 我们称这种性质为对 n “有求必允”。反过来, “对任意自然数 n , 总有自然是 m , 使得 $P(n, m)$ 为假”, 说明表格里每一行都至少有一个值为假, 我们称这种性质为对 n “有求必拒”。

二元命题 “有求必允” 时, 我们可以把 n 对应到一个使得 $P(n, m)$ 为真的 m 。这样定义的映射, 称为它的**求允映射**。同理, 二元命题 “有求必拒” 时, 我们可以把 n 对应到一个使得 $P(n, m)$ 为假的 m 。这样定义的映射, 称为它的**求拒映射**。

例子. 考虑关于正整数的二元命题 $P(n, m): m > n$ 。对每个 n , 取 $m = n+1$, 就有 $m > n$ 为真。因此, 我们可以构造求允映射:

$$f: n \mapsto n+1$$

对任意 n , 总存在 $m = f(n)$, 使得 $P(n, m)$ 为真。另一方面, 对每个 n , 取 $m = n$, 就有 $m > n$ 为假, 因此, 我们又可以构造求拒映射:

$$g: n \mapsto n$$

对任意 n , 总存在 $m = g(n)$, 使得 $P(n, m)$ 为假。

从上面可以看出, 二元命题可以既“有求必允”又“有求必拒”。此外, 求允映射、求拒映射不一定是唯一的。比如, 以上例子中, 我们也可以构造 $n \mapsto n+3$ 或 $n \mapsto n+100$, 它们都能“有求必允”。

二元命题存在求允映射, 说明它对于某个变量“有求必允”, 否则, 就说明它对该变量的某个取值无法“应允”, 只能“拒绝”, 也就是说它对这个取值“一路全假”。比如, 要么二元命题 $P(n, m)$ 对 n 有求必允, 要么对某个 n 的值“一路全假”。也就是说, “有求必允”的否定是“一路全假”。同理, “有求必拒”的否定是“一路全真”。换句话说, $\exists\forall$ 类和 $\forall\exists$ 类是对立的。

例题 5.3.1. 将以下命题转为二元命题, 并给出其否定:

1. 没有最大的素数。
2. a 遍历 A 时, $ax^2 - x + a$ 的最小值的最大值不小于 1。

解答. 1. 我们讨论的范围是全体素数的集合 S 。如果 p 是最大的素数, 那么其他的素数都比它小。没有最大的素数, 就是说这样的 p 不存在。换句话说, 对任意 $p \in S$, 总能找到比它大的素数 $q \in S$ 。这是一个“有求必允”类的命题, 给出任何素数 p , 求比它大的素数 q , 都能“得允”。用符号记为:

$$\forall p \in S, \exists q \in S, p < q.$$

这个命题的否定应该是“一路全假”类, 具体来说, 有一个“求”被“拒”了: 有 $p \in S$, 使得不存在 $q \in S$, $q > p$ 。或者:

$$\exists p \in S, \text{ 使得 } \forall q \in S, p \geq q.$$

2. 我们讨论的是给定的集合 A 。我们让变量 a 在 A 中取值, 并讨论映射 $f_a: x \mapsto ax^2 - x + a$ 的最小值。也就是说, 给定 $a \in A$, 当 x 遍历 $\mathbb{R}$ 时, 有某个实数 x_a , 使得 $f_a(x_a)$ 小于等于任何其他 $f_a(x)$ 。记这个最小值为 m_a , 一方面, $m_a = f_a(x_a)$; 另一方面, 当 a 遍历 A 时, 它代表一个映射 $m: a \mapsto m_a$ 。对给定的 a , 有实数 x , 使得 $f_a(x)$ 是 f_a 的最小值; 而根据题目说法, 这个映射又有最大值, 而这个最大值不小于 1。也就是说, 有某个 a , 使得 $m_a \geq 1$ 。而根据 m_a 的定义, 当 x 遍历 $\mathbb{R}$ 时, $f_a(x) \geq m_a \geq 1$ 。因此原命题可以表述为:

$$\exists a \in A, \text{ 使得 } \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 - x + a \geq 1.$$

这是一个“一路全真”类的命题, 我们能找到某个 a , 使得命题“ $ax^2 - x + a \geq 1$ ”对任意实数 x 成立。这个命题的否定应该是“有求必拒”类。具体来说, 对任意 $a \in A$, 都能找到实数 x , 使得 $ax^2 - x + a \geq 1$ 不真。换句话说,

$$\forall a \in A, \exists x \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } ax^2 - x + a < 1.$$

习题 5.3.1.

1. 用集合的语言解释: “有求必允”的否定是“一路全假”。用纵横表格画一个例子来说明它。

2. 考虑关于正整数 n, m 的二元命题 $P(n, m): n^2$ 整除 $m+1$ 。这个命题是否关于 n 有求必允? 是否关于 m 有求必允? 是否关于某个 m 一路全假? 是否关于某个 m 一路全真?

3. 考虑关于有理数 n, m 的二元命题 $P(n, m): n^2 = m$ 。这个命题是否关于 n 有求必允? 是否关于 m 有求必允?

4. 考虑关于实数的 x, y 的二元命题 $P(x, y):$ 只要实数 r 的绝对值小于 x , r^2 就小于 y 。这个命题是否关于 x 有求必允? 是否关于 y 有求必允?

5.4 多元命题*

一般来说, 命题里如果有多个变量, 那么每个变量都有自己的辖词。而每个辖词对应一个集合。每个变量的辖词都有两种可能, 于是, 三元命题就有八类, 四元命题有十六类, 等等。对于这些命题, 我们已经无法依靠纵横表格来直观理解了, 需要通过演算来了解它们的性质。

上一节中, 我们把二元命题分为四类。

$$(\forall\forall): \quad \forall p \in X (\forall q \in Y, P(p, q)).$$

$$(\exists\exists): \quad \exists p \in X (\exists q \in Y, P(p, q)).$$

$$(\exists\forall): \quad \exists p \in X (\forall q \in Y, P(p, q)).$$

$$(\forall\exists): \quad \forall p \in X (\exists q \in Y, P(p, q)).$$

每个命题依据辖词分为两层。外层命题的真假取决于内层命题的真假。我们发现, $\forall\forall$ 类和 $\exists\exists$ 类是对立的, $\exists\forall$ 类和 $\forall\exists$ 类是对立的。具体来说, 如果对某个二元判断 P , 命题 “ $\forall p \in X \forall q \in Y, P(p, q)$ ” 为假, 那么 “ $\exists p \in X \exists q \in Y, \neg P(p, q)$ ” 为真; 反之亦然。如果对某个二元判断 P , 命题 “ $\forall p \in X \exists q \in Y, P(p, q)$ ” 为假, 那么 “ $\exists p \in X \forall q \in Y, \neg P(p, q)$ ” 为真; 反之亦然。

实际上, 这件事情对“一层”的命题也是类似的。对于一元命题 P , “ $\forall x \in X, P(x)$ ” 为真, 则 “ $\exists x \in X, \neg P(x)$ ” 为假; 反之亦然。这是我们熟知的全判断和有判断的性质。

从一元和二元命题的真假关系出发, 我们可以猜测, 多元命题也有这样的性质。让我们来具体描述多元命题的情况:

定理 5.4.1. 设 n 是正整数, n 元嵌套命题 $\mathcal{P}_n$ 的形式为关于 n 元映射 P 的

n 层嵌套:

$$\mathcal{P}_n: \mathcal{X}_1 p_1 \in S_1, (\mathcal{X}_2 p_2 \in S_2, \cdots (\mathcal{X}_n p_n \in S_n, \underbrace{P(x_1, x_2, \cdots, x_n)}^{n-1 \uparrow}) \cdots)$$

其中 $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \cdots, \mathcal{X}_n$ 是各个变量的辖词, 可以是 $\forall$ 或 $\exists$, $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是分别对应的辖域。 $\mathcal{P}$ 的否定形式为以下操作的结果:

1. 将最内层的 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 换为 $\neg P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$;
2. 将每一层的辖词 $\mathcal{X}_n$ 改为另一个辖词, $\forall$ 改为 $\exists$, $\exists$ 改为 $\forall$ 。

我们可以验证, 这种做法在 $n = 1, 2$ 的情形下成立。一元和二元命题遵循这个规律。假设对某个正整数 n , 以上规律成立, 那么考虑 $n+1$ 元的命题 $P(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$, $n+1$ 层嵌套的命题可以看作:

$$\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{X}_1 p_1 \in S_1, \mathcal{P}_n(x_1).$$

其中 $\mathcal{P}_n(x_1)$ 是在给定了 x_1 的情况下的 n 层嵌套命题。要否定 $\mathcal{P}_{n+1}$, 可以对辖词 $\mathcal{X}_1$ 分情况讨论。 $\mathcal{X}_1$ 是 $\forall$ 时:

$$\neg \mathcal{P}_{n+1} = \neg (\forall p_1 \in S_1, \mathcal{P}_n(x_1)) = \exists p_1 \in S_1, \neg \mathcal{P}_n(x_1),$$

$\mathcal{X}_1$ 是 $\exists$ 时:

$$\neg \mathcal{P}_{n+1} = \neg (\exists p_1 \in S_1, \mathcal{P}_n(x_1)) = \forall p_1 \in S_1, \neg \mathcal{P}_n(x_1).$$

而 $\mathcal{P}_n(x_1)$ 作为 n 层嵌套命题, 其否定方式遵循规律。于是 $n+1$ 层的嵌套命题也遵循同样的规律。这说明任意层数的嵌套命题的否定都遵循规律。

例题 5.4.1. 解读以下多元命题的含义, 并写出它的否命题:

1. $\forall x \in S, \exists y \in U$, 使得 $\exists n \in \mathbb{N}, x^n < y$.
2. $\exists x \in S$, 使得 $\forall y \in U, \exists n \in \mathbb{N}, x^n < y$.

解答. 1. 命题 $\forall x \in S, \exists y \in U, \exists n \in \mathbb{N}, x^n < y$ 的意思是: “对 S 中的每一个 x , 都能在 U 中找到某个 y , 并且能找到某个自然数 n , 使得 $x^n < y$ 成立。”换句话说, 无论 x 取何值, 总存在一个 y 和一个指数 n 使不等式成立。否定这个命题: 按照规则, 依次翻转量词: $\forall x$ 变成 $\exists x$, $\exists y$ 变成 $\forall y$, $\exists n$ 变成 $\forall n$, 并否定最内层判断, 得到:

$$\exists x \in S, \forall y \in U, \forall n \in \mathbb{N}, x^n \geq y.$$

这个否定命题的意思是: “存在某个 $x \in S$, 使得对于 U 中所有的 y 和所有自然数 n , 都有 $x^n \geq y$ 。”

2. 命题 $\exists x \in S, \forall y \in U, \exists n \in \mathbb{N}, x^n < y$ 的意思是: “存在一个 $x \in S$, 使得对于 U 中的每一个 y , 都能找到某个自然数 n , 满足 $x^n < y$ 。”否定这个命题: $\exists x$ 变成 $\forall x$, $\forall y$ 变成 $\exists y$, $\exists n$ 变成 $\forall n$, 并否定最内层判断:

$$\forall x \in S, \exists y \in U, \forall n \in \mathbb{N}, x^n \geq y.$$

即: “对 S 中所有的 x , 都存在某个 $y \in U$, 使得对于所有自然数 n , 都有 $x^n \geq y$ 。”

习题 5.4.1.

1. 写出下列命题的否定形式, 并尝试判断它们的真假:

1.1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \leq m \leq n^2$, 且 m 整除 $n^2 + 1$.

1.2. $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \exists z \in \mathbb{Q}$, 只要 $x < y$, 就有 $x < z < y$.

1.3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}$, 使得 $\forall z \in \mathbb{N}$, 只要 $x^2 + x < z^2 - z$, 就有 $x < y < z$.

1.4. $\forall r > 0, \exists m \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 只要 $n > m$, 就有 $\frac{1}{n} < r^2$.

1.5. $\exists n \in \mathbb{N}, n > 1$, 使得: 任何大于 1 的自然数 p 只要整除 $2^{2^n} + 1$, 就有正整数 k , 使得 $p = k \cdot 2^n - 1$ (形同 $2^{2^n} + 1$ 的数称为费马数。可以先调查费马数的因数的性质, 再尝试判断命题真假)。

2. 将下列语句转为使用符号记录的多层命题, 并写出它们的否定形式:

- 2.1. 班里每个学生都有一本最喜欢的书。
- 2.2. 图书馆里有一本书被所有男生喜欢，但不被任何女生喜欢。
- 2.3. 对于任意两个不同的有理数，总有一个有理数介于它们之间。
- 2.4. 不存在比 5 大的正整数 n ，使得 $2^{2^n} + 1$ 是素数。