

第六册

大青花鱼

目录

第一章 向量	5
1.1 点、向量和直线	5
1.2 角度与长度	14
1.3 直线的方程	19
1.4 圆的方程	24
1.5 平面形的变换	27
 第二章 平面中的运动	 39
2.1 轨迹	39
2.2 变与不变	41
2.3 运动的速度	45
 第三章 从平面到立体	 51
3.1 多面体	52
3.2 旋转体和球	54

3.3 在平面上表示立体形状*	55
第四章 同余	59
4.1 同余类	60
4.2 完全同余系和简化同余系	63
4.3 方余定理	66
第五章 数据和概率	69
5.1 实验和样本	69
5.2 随机变量	70
5.3 条件概率和独立事件	76
5.4 大数定律*	80

第一章 向量

第五册中，我们学习了用三角函数解三角形。三角函数是定量研究平面形的利器。不过，三角函数本身并不是简单的函数。我们目前只能通过查表的方式得到函数值。这让我们思考，能不能打造一种更方便定量研究的体系呢？

回顾我们对平面形的研究，我们从几条公理出发，得出点、直线、三角形、圆等形状之间的定性关系。公理体系的缺陷在于没有与数紧密结合。比如，“两点之间直线最短”，除了定性的“最短”，没有提供别的信息。我们需要一种根本上和数量结合的体系，来理解各种平面形状。

此外，公理体系中并没有强调运动的概念。我们说点运动形成了线，旋转形成角度和圆，但并没有相关的工具来描述具体的运动。我们需要一种根本上和运动结合的体系，来理解形状之间的关系。

1.1 点、向量和直线

学习有理数的时候，我们使用数轴上的点表示。每个点代表一个实数。两点重合，当且仅当它们代表同一个数。这种表示方法把数和直线上的点牢牢绑在一起。我们可以用数的关系表示直线上点的关系。数轴使我们可以定量理解直线。

至于平面中的点，我们用相互垂直的数轴定义了点的坐标。每个点代表一个有序数对。两个数按顺序排列，对应平面中一点。

能不能像数轴一样，用一个量代表平面中一点呢？数轴之所以能用一个数代表一个点，是因为直线只有两个方向，使用正负号就可以代表方向。平面中不止两个方向，我们无法用正负来表示方向了。为此，我们引入一个新的量来代表平面中的点：**向量**。

自然数、有理数、实数都有自己的运算法则。向量作为代表点的量，需要满足怎样的运算法则呢？我们从运动出发，给出以下的法则：

- 向量的加法就是平移：两个向量相加得到另一个向量。向量的加法满足结合律和交换律。
- 零向量表示静止不变：存在这样一个向量，任何向量与它相加，仍然是自己。这个向量叫做零向量。零向量不定义方向，也可以说它与任何向量同向或反向。它对应的点称为**原点**。
- 非零向量放缩，引出一根数轴：任何实数乘以向量，得到方向相同或相反的向量。这个运算称为**数乘运算**。数乘运算对应图形的放缩。
- 放缩和四则运算相容：数轴上可以做数的运算。
- 平移和放缩相容：先平移再放缩，和先放缩再平移，结果一样。

按照定义，**向量就是点**，所以可以用大写字母来标记。比如零向量就是原点，记为 O 。此外，**向量就是平移**。点 A 就是把 O 对应到 A 的平移，也是 O 平移的结果，记为 $\overrightarrow{OA}$ 。

让我们用数学语言把这些法则具体写出来。我们把平面看作集合，记为 $\mathbb{V}$ ，其中的元素称为向量或点，用粗体小写字母表示，以便和代表数的量区分：

- 加法结合律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ 。
- 加法交换律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。
- 存在零向量： $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ 。

- 放缩和四则运算相容: $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$. $\forall s, t \in \mathbb{R}, (s + t) \cdot \mathbf{a} = (s \cdot \mathbf{a}) + (t \cdot \mathbf{a}), (s \cdot t) \cdot \mathbf{a} = s \cdot (t \cdot \mathbf{a})$.
- 放缩和平移相容: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \forall t \in \mathbb{R}, t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$.

从以上法则出发, 我们可以定义直线:

定义 1.1.1. 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量 $A = \mathbf{a}$, $\{t\mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过原点 O 和 A 的直线 OA , 称为 A 引出的直线, 记为 $\mathbb{R}\mathbf{a}$. 给定向量 $B = \mathbf{b}$, $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过 B 的直线, 记为 $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 其中 $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 称为它的直部; 而 $\{t\mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$ 就是直线 AB .

给定非零向量 $\mathbf{a}$, 如果向量 $\mathbf{b}$ 可以通过 $\mathbf{a}$ 放缩得到, 或者说 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}\mathbf{a}$, 就称两者**共轴**, 表示两者在共同的数轴上。

类比可以定义线段和射线: 给定非零向量 $A = \mathbf{a}$ 和向量 $B = \mathbf{b}$, $\{(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} | t \in [0; 1]\}$ 是线段 AB , $\{(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} | t \geq 0\}$ 是射线 AB .

这样定义的线段和射线, 也具备了数轴的性质。比如, 在线段 $\{(1 - t)A + tB | t \in [0; 1]\}$ 中, t 的不同值就对应了不同的点: $t = 0$ 对应点 A , $t = 1$ 对应点 B . 对一般的 $t \in (0; 1)$, $(1 - t)A + tB$ 对应的点 P 在 AB 上, 可以看作数轴 AB 上的点。因此满足:

$$\begin{aligned} |AP| &= |P - A| = |tB - tA| &= t|AB|, \\ |PB| &= |B - P| = |(1 - t)B - (1 - t)A| &= (1 - t)|AB|. \end{aligned}$$

也就是说, P 是线段 AB 上使得 $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{t}{1-t}$ 的点。

反过来, 设 $\frac{|AP|}{|PB|}$ 等于定值 $k > 0$, 对应的点 P 是什么点呢? 这个问题实际上是求方程:

$$\frac{t}{1-t} = k$$

的解。容易解出这个方程的唯一解: $t = \frac{k}{k+1}$. 因此我们得到结论:

定理 1.1.1. 定比分点定理 线段 AB 上到两端距离之比 $\frac{|AP|}{|PB|}$ 为定值 k 的点 P 恰有一个, 称为它的 k 分点。

正数 k 越小, k 分点距离 A 越近, k 越大, k 分点离 B 越近; $k = 1$ 时, 我们就得到线段的中点。

例题 1.1.1. 三角形 ABC 的边 AB 、 BC 上分别有点 P 、 Q , 使得:

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|BQ|}{|QC|} = 2,$$

定义点 X :

$$X = \frac{A + 2B + 4C}{7}.$$

验证: X 是直线 AQ 和 PC 的交点。

解答. 证明: 设 $P = (1-t)A + tB$ 。 P 是线段 AB 的 2 分点, 所以

$$t = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

即:

$$P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \frac{A + 2B}{3}.$$

同理, 设 $Q = (1-t)B + tC$, 则 $t = \frac{2}{3}$, 即:

$$Q = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C = \frac{B + 2C}{3}.$$

由于线段的定比分点在直线上, 只要找出合适的参数 t , 使得 $X = (1-t)A + tQ$, 就说明 X 在 AQ 上。

$$X = (1-t)A + tQ = (1-t)A + \frac{t}{3}B + \frac{2t}{3}C,$$

因此, 令 $t = \frac{6}{7}$, 就有 $1-t = \frac{1}{7}$ 、 $\frac{t}{3} = \frac{2}{7}$ 、 $\frac{2t}{3} = \frac{4}{7}$ 。即 $(1-t)A + \frac{t}{3}B + \frac{2t}{3}C = \frac{A+2B+4C}{7}$ 。这说明:

$$X = (1 - \frac{6}{7})A + \frac{6}{7}Q.$$

也就是说, X 在直线 AQ 上, 是线段 AQ 的 $\frac{6}{7}$ 分点。

同理可以验证,

$$(1 - \frac{4}{7})P + \frac{4}{7}C = \frac{3}{7} \cdot \frac{B+2C}{3} + \frac{4}{7}C = \frac{A+2B+4C}{7}.$$

这说明:

$$X = (1 - \frac{4}{7})P + \frac{4}{7}C.$$

也就是说, X 在直线 PC 上, 是线段 PC 的 $\frac{4}{7}$ 分点。

综上所述, X 既在直线 AQ 上也在直线 PC 上, 是直线 AQ 和 PC 的交点。

以上我们讨论了 $k > 0$ 的情况, 显然, $k = 0$ 对应 $P = A$ 。对于负数 k , 有没有对应的点呢? 我们用平移的思想考虑这个问题, 从 A 到 P 经历的平移是 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, 从 P 到 B 经历的平移是 $\overrightarrow{PB} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ 。它们的系数之比就是 $\frac{t}{1-t}$ 。于是, 我们可以对一般的 k 定义定比分点: 如果 k 能使得方程

$$\frac{t}{1-t} = k$$

有唯一解, 那么我们就把对应的点 P 称为 AB 的 k 分点。

如果 $k < -1$, 那么 k 分点对应的 $t = \frac{k}{k+1} > 1$, 也就是说, P 在线段 AB 沿 B 的延长线上。如果 $-1 < k < 0$, 那么 k 分点对应的 $t = \frac{k}{k+1} < 0$, 也就是说, P 在线段 AB 沿 A 的延长线上。如果 $k = -1$, 以上方程无解, 这说明 -1 分点不存在。

共轴的向量, 通过数轴, 可以方便地讨论相互的位置关系。不共轴的向量之间, 如何讨论位置关系呢? 为此, 我们要引入平面的根本性质:

- 给定任何非零向量 A , 平面中总有另一个向量 B , 不在直线 OA 上。我们说两者**不共轴**。
- 从不共轴的向量 A, B 出发, 经过放缩、平移, 可以得到平面中任何向量。具体来说, 任何向量都可以表示成 $sA + tB$ 的形式, 集合 $\{sA + tB \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$ 就是整个平面。这样的 A, B 称为平面的一组**基或基底**。

举例来说,在直角坐标系中,我们选择了原点重合、互相垂直的两条数轴,以每条数轴上数 1 对应的点(记为 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) 出发,通过放缩和平移,就得到平面所有的点。平面中任一点可以写成 $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, 其中 x, y 就是点的坐标。直角坐标系其实是一种用向量描述平面的方法。 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 就是一组基底。给定基底后,平面中的点用两个实数构成的有序数对(也就是坐标)表示,所以平面也记为 $\mathbb{R}^2$ 。

我们知道,平面中的点的坐标是唯一的。从向量的角度来说,可以表达成:用基底 A, B 表示向量的方法只有一种。如果向量 P 既能写成 $P = s_1A + t_1B$, 又能写成 $P = s_2A + t_2B$, 那么 $s_1 = s_2, t_1 = t_2$ 。我们说,作为基底的向量 A, B 是直无关的:

定义 1.1.2. 考虑一组向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 和同样数量的系数 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 。以下的向量:

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n$$

称为这组向量(关于系数 $t_1, t_2, \dots, t_n$) 的**直组合**。 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 称为直组合的系数。能表示为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 的直组合的向量,称为这组向量的**生成向量**,所有生成向量的集合称为这组向量的**生成集**。

如果一组向量的生成向量只能用唯一的方式表示为它们的直组合,就说这组向量是**直无关的**, 否则就说这组向量是**直约束的**或**直相关的**。

从这些定义出发,我们容易想到一些基本的性质。比如,一组向量的生成集总会包括这些向量自身,也总包括零向量。

从平面的根本性质,可以得到:

定理 1.1.2. 平面基本定理 平面中不共轴的两个向量总是直无关的,生成集是整个平面。多于两个向量如果不共轴,总是直约束的。

证明: 从平面的根本性质第二条可以直接得出:平面中不共轴的两个向量,生成集是整个平面,称为平面的基底。下面证明平面的基底总是直无关的。

使用反证法来证明。反设某组基底 A, B 是直约束的，即有某个向量 P 可以用两种形式表示成 A, B 的直组合：

$$P = s_1 A + t_1 B = s_2 A + t_2 B.$$

且有序数对 (s_1, t_1) 和 (s_2, t_2) 不完全相等。不妨设 $s_1 \neq s_2$ 。从上式可以得到零向量的表示：

$$\mathbf{0} = (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B.$$

于是

$$A = -\frac{t_1 - t_2}{s_1 - s_2} B.$$

A, B 共轴，矛盾！因此原命题成立：平面的基底总是直无关的。

多于两个向量 $P_1, P_2, \dots, P_n$ ，如果不共轴，那么至少有两个向量不共轴。记为 P_1, P_2 ，则 P_1, P_2 构成了平面的基底。其他向量都可以表示成 P_1, P_2 的直组合。

考虑用这组向量生成零向量。首先，令所有系数为 0。零向量总能表示为关于系数 $(0, 0, \dots, 0)$ 的直组合。其次，在其他向量里面选一个，比如 P_k ， P_k 可以表示为 P_1, P_2 的直组合： $P_k = sP_1 + tP_2$ 。于是令 P_1, P_2 的系数分别为 s, t ， P_k 的系数为 -1 ，其他向量系数为 0。零向量表示为：

$$\mathbf{0} = s \cdot P_1 + t \cdot P_2 + (-1) \cdot P_k + \sum_{i \neq 1, 2, k} 0 \cdot P_i$$

零向量表示方式不唯一，说明这组向量是直约束的。 □

从证明中可以看出，零向量的表示方式是判别向量是否直相关的方便方法。这是因为生成集里面某向量表示不唯一，等于说零向量表示不唯一。而我们总知道零向量的一种表示方式：所有系数为 0。这样，我们只需要讨论另一种表示方式是否存在。我们也可以把这个思考方法总结成：

定理 1.1.3. 直无关向量组的判定 直无关的向量组只能用系数全为零的方式表示零向量。只能用系数全为零的方式表示零向量的向量组是直无关的。

换句话说, 给定 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, 如果存在不全为零的实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 使得直组合 $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n$ 是零向量, 那么这 n 个向量直相关。如果不存在这样一组实数, 那么这 n 个向量直无关。

平面基底是直无关的, 也就是说, 任何向量表示成基底的直组合, 方法是唯一的。使用恰当的基底, 可以从更好的角度看问题。

例题 1.1.2. 三角形 ABC 的边 AB 、 BC 上分别有点 P 、 Q , 使得:

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|BQ|}{|QC|} = 2,$$

试用 A, B, C 对应的向量, 表示直线 AQ 和 PC 的交点。

解答. 前面我们验证了这个交点存在。这里我们来思考: 如果一开始不知道交点, 如何把它求出来。我们已经知道如何用 A, B, C 表示 P 和 Q :

$$P = \frac{A + 2B}{3}, \quad Q = \frac{B + 2C}{3}.$$

记交点为 X 。下面我们用 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 来表示 $\overrightarrow{BP}$ 和 $\overrightarrow{BQ}$, 然后分别用 $\overrightarrow{BP}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BQ}$ 来表示交点 X 。 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 不共轴, 所以构成平面的基底。根据平面基本定理, 这两种表示方式都可以归于 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的直组合, 即归根结底是同一个方式。这样, 我们就能建立方程组, 推出 X 的具体表示方式。

首先考虑 $\overrightarrow{BP}$,

$$\overrightarrow{BP} = P - B = \frac{A + 2B}{3} - B = \frac{A - B}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA},$$

同理,

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

设 $\overrightarrow{BX} = (1-t)\overrightarrow{BP} + t\overrightarrow{BC} = (1-s)\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{BQ}$, 则:

$$\begin{aligned} \frac{1-t}{3}\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BC} &= (1-t)\overrightarrow{BP} + t\overrightarrow{BC} \\ &= (1-s)\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{BQ} = (1-s)\overrightarrow{BA} + \frac{2s}{3}\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

两种表达方式一致，所以对应系数相同。因此有以下方程组：

$$\begin{cases} \frac{1-t}{3} = 1-s \\ t = \frac{2s}{3} \end{cases}$$

解得 $t = \frac{4}{7}$, $s = \frac{6}{7}$ 。代入上面 $\overrightarrow{BX}$ 的表达式，可以求得：

$$\overrightarrow{BX} = (1-t)\overrightarrow{BP} + t\overrightarrow{BC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BP} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}.$$

即：

$$X - B = \frac{A - B}{7} + \frac{4C - 4B}{7}.$$

于是：

$$X = \frac{A + 2B + 4C}{7}.$$

这也是我们前面验证过的交点。

思考 1.1.1.

1. 设平面上有两点 A, B ，以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $AOBC$ 。向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 是什么关系？

2. 设平面上有两点 A, B ，三角形 OAB 中，连接边 OA, OB 的中点 M, N 。向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 是什么关系？

3. 例题 1.1.2 的解答里，如果关于 s, t 的方程组无解，代表什么？是否存在无解的情况？

习题 1.1.1.

1. 证明：零向量只有一个，任何向量乘 0 得到零向量。

2. 证明：零向量乘任何数得到零向量。

3. 证明：任何向量 $\mathbf{a}$ 都有唯一的反向量 $\mathbf{b}$ ，满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 。

4. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共轴，如果 $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ，证明： $s = t = 0$ 。

直角坐标系 xOy 中，设 $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y$, $\mathbf{c} = -\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$ 。

5. 在坐标轴上标出 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 。

6. 用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 和点 $(3, 0)$ 。

7. 用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示它们的中点、3 分点、 -0.5 分点、 -3 分点。写出这些点的坐标和直线的方程。
8. 证明：向量组的生成集总包含向量组中的各个向量，以及零向量。
9. 证明：共轴的向量总是直约束的。
10. 用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示顶点为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的三角形三边和重心。

1.2 角度与长度

根据平面的根本性质，任何向量都可以用两个不共轴向量表示。如何讨论它们的位置关系呢？下面我们定义一种关系，把长度、距离和角度统一起来。

给定平面基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ，我们给出这样一个二元映射 f ：

$$\forall \mathbf{a} = x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, \mathbf{b} = x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_A x_B + y_A y_B.$$

f 把两个向量对应到一个实数。它满足以下五个性质：

- 向量的顺序不影响关系大小：

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) \\ &= x_A x_B + y_A y_B \\ &= x_B x_A + y_B y_A \\ &= f(x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2, x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

- 零向量和任意向量关系为 0：

$$\begin{aligned} f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, \mathbf{0}) &= f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2) \\ &= x_A \cdot 0 + y_A \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- 非零向量与自身的关系总是正的： x_A, y_A 不全为零时，

$$f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2) = x_A^2 + y_A^2 > 0.$$

- 和向量的放缩相容：

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, t \cdot (x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2)) \\ &= x_A \cdot t \cdot x_B + y_A \cdot t \cdot y_B \\ &= t \cdot (x_A x_B + y_A y_B) \\ &= t \cdot f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

- 和向量的平移相容：

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, (x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) + (x_C \mathbf{e}_1 + y_C \mathbf{e}_2)) \\ &= x_A(x_B + x_C) + y_A(y_B + y_C) \\ &= (x_A x_B + y_A y_B) + (x_A x_C + y_A y_C) \\ &= f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) + f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_C \mathbf{e}_1 + y_C \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

满足以上五个条件的映射 f 称为平面向量的**内积**。从第四个性质可知，向量与自身的内积总是正数。我们把这个数的平方根叫做**向量的长度**，记为：

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{f(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

两个向量之差的长度，称为向量之间的距离。

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{f(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})}.$$

如果基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是直角坐标系的基，那么

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a} &= x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \\ \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2}, \\ \forall \mathbf{a} &= x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{b} = x_B \mathbf{e}_x + y_B \mathbf{e}_y, \\ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \end{aligned}$$

给定向量 $A = \mathbf{a}$ 、 $B = \mathbf{b}$ ， $\|\mathbf{a}\|$ 就是 $|OA|$ ， $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ 就是 $|AB|$ 。也就是说，通过内积定义的映射 f ，分别与直观经验中长度和距离的概念相符合。

那么， f 本身有什么含义呢？我们来计算 $\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2} &= \frac{x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2}{2} \\ &= x_A x_B + y_A y_B = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

另一方面，余弦定理告诉我们，

$$\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2} = |OA||OB| \cos \angle AOB.$$

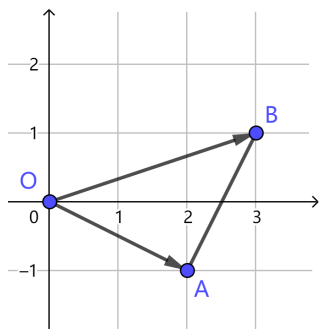
也就是说， $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle AOB$ 。内积 f 的本质是向量夹角的余弦与向量长度的乘积。通过内积，我们把角度和长度统一起来了。

例题 1.2.1. 给定向量 $A(2, -1)$ 和 $B(3, 1)$ ，求它们的内积。

解答. 向量 A 和 B 的内积为 $2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 5$ 。如右图，如果计算线段 OA 和 OB 长度，可得： $|OA| = \sqrt{5}$ ， $|OB| = \sqrt{10}$ 。于是

$$\cos \angle AOB = \frac{f(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即 $\angle AOB = 45^\circ$ 。



向量夹角的余弦值总在 -1 和 1 之间，所以向量的内积的绝对值不大于向量长度的乘积：

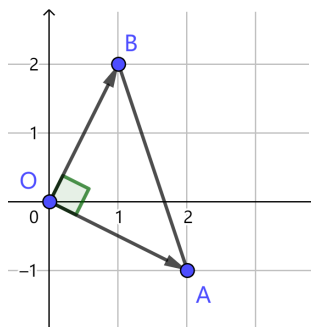
$$|x_A x_B + y_A y_B| \leq \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}.$$

可以验证这个关系对任意 x_A, y_A, x_B, y_B 成立。从这个关系出发，可以得到：

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq \sqrt{x_A^2 + y_A^2} + \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = |OA| + |OB|.$$

这符合直观经验中“三角形两边之和大于第三边”或“两点之间线段距离最短”的性质。

内积为 0，就表示向量夹角的余弦为 0，即两个向量垂直。比如，令 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$ ， $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$ ，那么 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$ 。在平面上画出对应的点 A, B ，可以验证 $\angle AOB = 90^\circ$ 。



内积映射并不是唯一的，我们来看另一个内积映射 f_2 ：

$$\forall x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbb{R}, \quad f_2(x_A\mathbf{e}_1 + y_A\mathbf{e}_2, x_B\mathbf{e}_1 + y_B\mathbf{e}_2) = 2x_Ax_B + y_Ay_B.$$

可以验证， f_2 也满足 f 满足的五个性。从 f_2 出发，我们也可以定义距离和长度：

$$\forall \mathbf{a} = x_A\mathbf{e}_x + y_A\mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{a}\|_2 = f_2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2x_A^2 + y_A^2.$$

这样定义的距离和长度和我们直观经验中有些不一样，不过，我们可以验证，这样定义的距离也满足“两点之间线段最短”的性质。

$$|2x_Ax_B + y_Ay_B| \leq \sqrt{2x_A^2 + y_A^2} \sqrt{2x_B^2 + y_B^2}.$$

因此， f_2 也是内积。

我们把符合直观经验的内积 f 称为**经典内积**，一般称内积都默认指经典内积；把对应的长度称为向量的**模**。我们把向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的（经典）内积记为 $(\mathbf{a} | \mathbf{b})$ ，不至于混淆时，也常称为**点积**，记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ；把它们的模记为 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\mathbf{b}|$ 。

既然有余弦，自然有正弦。记 $\alpha = \angle AOB$ ，则 $(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$ ，于是，

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} | \mathbf{b})^2$$

记 $\mathbf{a} = x_A\mathbf{e}_x + y_A\mathbf{e}_y$ ， $\mathbf{b} = x_B\mathbf{e}_x + y_B\mathbf{e}_y$ ，则

$$\begin{aligned} (x_A^2 + y_A^2)(x_B^2 + y_B^2) \sin^2 \alpha &= (x_A^2 + y_A^2)(x_B^2 + y_B^2) - (x_Ax_B + y_Ay_B)^2 \\ &= (x_Ay_B - x_By_A)^2 \\ |\sin \alpha| &= \frac{|x_Ay_B - x_By_A|}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} \end{aligned}$$

我们得出了夹角 $\angle AOB$ 正弦的绝对值。

观察向量夹角的正弦和余弦，我们注意到，它们的表达式与和差角公式有相似之处。 $x_A x_B + y_A y_B$ 与差角余弦公式形式相似， $x_A y_B - x_B y_A$ 与差角正弦公式形式相似。

让我们在直角坐标系中找几个例子，看看直观结果。设有点 $A(1, 0)$ 、 $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。不难得出 $\angle AOB = 60^\circ$ 。我们用以上公式计算 $\angle AOB$ 的正弦和余弦：

$$\frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{1}{2}.$$

把 P 的坐标换成 $(0, 1)$ 、 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 等，我们发现，通过以上两个公式得到的值，分别是 $\angle AOB$ 的正弦、余弦值。记 $\angle AOB = \alpha$ ，那么：

$$\sin \alpha = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}.$$

我们是通过面积定义正弦的。比如，邻边为 OA 和 OB 的平行四边形，面积是 $|OA||OB|\sin \angle AOB$ 。对照上面正弦的表达式，可以发现这个面积等于 $x_A y_B - x_B y_A$ 。于是，我们把对应的映射

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto x_A y_B - x_B y_A.$$

称为向量 A, B 的面积，记为 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 。

向量的面积和内积，分别对应正弦和余弦。两向量面积为零，当且仅当它们共轴；两向量内积为零，当且仅当它们互相垂直。

习题 1.2.1.

1. 直角坐标系中，已知两向量，计算它们的内积和面积，讨论它们的关系。

1.1. $A(0, 2)$, $B(1, 1)$

1.2. $A(2, 1)$, $B(0.5, -1)$

1.3. $A(1.6, 0.2)$, $B(-0.9, -3)$

1.4. $A(1, -0.28), B(-0.45, -0.6)$

2. 直角坐标系中, 已知向量 B 的模为 2, 根据以下条件, 求向量 A, B 的内积:

2.1 $A = (-4, 2), \angle AOB = 60^\circ$

2.2 $A = (0, 5), \angle AOB = 135^\circ$

2.3. $A = (3, -2.5), \angle AOB = 45^\circ$

3. 直角坐标系中, 已知点 $P(2, 1)$, 求使得 P, Q 内积为 4 的点 Q 。

4. 直角坐标系中, 已知点 $P(2, 1)$, 求使得 P, Q 面积为 4 的点 Q 。

思考 1.2.1. 如果直角坐标系 xOy 的 x 轴和 y 轴沿逆时针排布, 而角度的正方向为顺时针方向, 角 α 的正弦和余弦是否还能写成

$$\sin \alpha = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$

的形式?

1.3 直线的方程

我们已经讨论过直线和方程的关系。直角坐标系中, 任意给定二元一次方程 $ax + by + c = 0$ (a, b 不全为 0), 它的解集都对应平面中一条直线。我们把这个二元一次方程称为直线的一般式方程。比如, $3x - 2y + 1 = 0$ 就是一条直线的一般式方程。不过, 从这个式子, 我们不容易看出相应的直线有什么性质。已知直线的一些直观性质, 我们希望将这些直观性质和直线的方程联系起来, 以便通过方程的方式, 来分析直线以及直线和其他平面图形的关系。

比如, 已知直线过点 $A(x_A, y_A)$, 斜率为 k 。直线斜率为 k , 说明直线是某个一次函数 $x \mapsto kx + b$ 的图像。对比可知, 直线方程为:

$$y - y_A = k(x - x_A).$$

我们把这个方程称为直线的**点斜式**方程。已知直线上一点和直线的斜率，可以写出直线的点斜式方程。比如，过 $(1, 2)$ ，斜率为 2 的直线方程为： $y - 2 = 2(x - 1)$ ，即 $y - 2x = 0$ 。

下面我们用向量的语言，给出有不同直观性质的直线的方程。

点向式：已知直线过点 $A(x_A, y_A)$ ，方向向量为 $\mathbf{b} = (x_B, y_B)$ ，那么直线为 $A + \mathbb{R}\mathbf{b}$ 。考虑直线上一点 $P(x, y)$ ， $\overrightarrow{AP}$ 和 $\mathbf{b}$ 共轴，所以面积为 0 。于是 (x, y) 满足方程：

$$(x - x_A)y_B - (y - y_A)x_B = 0.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的点向式方程。已知直线上一点和直线的方向，可以写出直线的点向式方程。比如，过 $(1, 2)$ ，方向为 $(-1, 1)$ 的直线方程为： $1 \cdot (x - 1) - (-1) \cdot (y - 2) = 0$ ，即 $x + y = 3$ 。

两点式：已知直线过点 $A(x_A, y_A)$ 和点 $B(x_B, y_B)$ ，那么直线为 $A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB}$ 。考虑直线上一点 $P(x, y)$ ，则 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 共轴。于是 (x, y) 满足方程：

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0.$$

我们把以上方程称为直线的两点式方程。已知直线上不同的两点，可以写出直线的两点式方程。比如，过 $(1, 2)$ 、 $(-2, 1)$ 的直线方程为： $(x - 1)(1 - 2) - (y - 2)(-2 - 1) = 0$ ，即 $-x + 3y = 5$ 。

点法式：已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$ ，并且和 $\mathbf{b} = (x_B, y_B)$ 垂直。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ ， $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直，所以内积为 0 。于是 (x, y) 满足方程：

$$(x - x_A)x_B + (y - y_A)y_B = 0.$$

我们把 $\mathbf{b}$ 称为直线的**法向量**，把以上方程称为直线的点法式方程。已知直线上一点和法向量，可以写出直线的点法式方程。比如，过 $(1, 2)$ ，法向量为 $(3, -1)$ 的直线方程为： $(x - 1) \cdot 3 + (y - 2) \cdot (-1) = 0$ ，即 $3x - y = 1$ 。

等高式：已知点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 与 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 的面积为 S ，则 (x, y) 满足方程：

$$xy_B - yx_B = S.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的等高式方程。从直观上看，它表示所有以 OB 为底，面积相等（从而高相等）的三角形 OBP 的顶点 P 的集合，即一条平行于 OB 的直线。比如，与 $(1, -1)$ 的面积为 3 的点构成直线，方程为： $-x + y = 3$ 。

$S = 0$ 时，我们就得到直线 OB 。也就是说，已知 B 的坐标 (x_B, y_B) ，直线 OB 的方程是 $xy_B - yx_B = 0$ 。

等垂式：已知点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 与 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 的内积为 T ，则 (x, y) 满足方程：

$$xx_B + yy_B = T.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的等垂式方程。

从直观上看，作 P 到直线 OB 的垂线，垂足为 H 。设 $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OB}$ ，

$$T = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

$HP \perp OB$ ，所以 $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 。于是 $T = t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = t|OB|^2$ ，算得 $t = \frac{T}{|OB|^2}$ ， $\overrightarrow{OH} = \frac{T}{|OB|^2}\overrightarrow{OB}$ 。这说明 H 是定点。

反之，过 H 点作垂直 OB 的直线。直线上任一点到 OB 的垂足是 H ，因此 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = T$ 。

这说明直线 $xx_B + yy_B = T$ 是一条垂直于 OB 的直线，是所有到 OB 的垂足为定点 H 的点 P 的集合。比如，与点 $B(1, -1)$ 的内积为 3 的点构成直线，方程为： $x - y = 3$ 。它垂直于直线 OB ： $x + y = 0$ 。

使用等高式和等垂式，我们可以讨论直线平行和垂直的关系。我们来看两个典型问题：

例子 1.3.1. 求经过点 $P(x_P, y_P)$ 并平行于直线 $l: ax + by + c = 0$ 的直线 (如果存在) 的方程。

解答. 首先把直线方程转为等高式: $ax - (-b)y = -c$, 它表示平行于向量 $(a, -b)$, 与它的面积为 $-c$ 的直线。如果 P 在直线上, 那么 P 满足 $ax_P - (-b)y_P = -c$ 。这时符合要求的平行线不存在。如果 P 不在直线上, 我们可以构造直线 $l': ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。 l' 过 P , 且与向量 $(a, -b)$ 平行, 因此平行于 l 。

另一方面, 如果有直线过点 P 并平行于 l , 那么它与向量 $(a, -b)$ 平行。设它的方程为 $ax - (-b)y = S$ 。由于 P 在直线 $ax - (-b)y = S$ 上, P 满足 $ax_P - (-b)y_P = S$, 即平行线方程为 $ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。显然, $ax_P - (-b)y_P = -c$ 时, 两直线重合, 不符合平行线定义。

因此, $ax_P - (-b)y_P = -c$ (P 在直线上) 时无平行线; 其他情况下, 恰有一条平行线: $ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。化简后的方程为:

$$ax + by = ax_P + y_P.$$

另解: 首先把直线方程转为等垂式: $ax + by = -c$, 它表示与点 $M(a, b)$ 的内积为 $-c$ 的直线, 也就是垂直于 OM , 垂足 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{-c}{|\overrightarrow{OM}|^2} \overrightarrow{OM}$ 的直线。如果有直线过点 P 并平行于 l , 那么它也和 OM 垂直。把它写成等垂式: $ax + by = T$ 。由于 P 在 l' 上, 所以 $T = ax_P + by_P$ 。于是 l' 的方程为 $ax + by = ax_P + by_P$ 。显然, $ax_P + by_P = -c$ 时, 两直线重合, 不符合平行线定义。

另一方面, 考察 $l': ax + by = ax_P + by_P$, 它垂直于 OM , 所以与 l 平行或重合。容易验证, 两线重合当且仅当 $ax_P + by_P = -c$ 。

因此, $ax_P + by_P = -c$ (P 在直线上) 时无平行线; 其他情况下, 恰有一条平行线:

$$ax + by = ax_P + by_P.$$

我们发现, 与 $ax + by + c = 0$ 平行的直线, 总可以写成 $ax + by + c' = 0$ 的形式。我们把 $ax + by$ 称为**直线的头**。头相同的直线相互平行或重合。

例题 1.3.1. 求经过点 $P(x_P, y_P)$ 并垂直于直线 $l: ax + by + c = 0$ 的直线 (如果存在) 的方程。

解答. 把直线方程写成点法式: $(x - x_Q)a + (y - y_Q)b = 0$, 其中 $Q(x_Q, y_Q)$ 是 l 上一点。这说明 (a, b) 是 l 的法向量。因此, 以 (a, b) 为方向的直线: $(x - x_P)b - (y - y_P)a = 0$ 就是过 P 且垂直于 l 的直线。

我们发现, 与 $ax + by + c = 0$ 垂直的直线, 总可以写成 $bx - ay + c' = 0$ 的形式。

例题 1.3.2. 给定一点 $P(x_P, y_P)$ 和一条直线 $l: ax + by + c = 0$, 如何计算 P 到直线 l 的距离 d ?

解答. 首先把直线方程转为等高式: $ax - (-b)y = -c$, 它表示与点 $M(a, -b)$ 的面积为 $-c$ 的直线。 P 与点 M 的面积为 $ax_P - (-b)y_P$ 。如果 P 到 l 的垂足为 Q , P 到 OM 的垂足为 H , 那么 P 到 l 的距离 $d = |PQ|$ 是 $|HQ|$ 与 $|PH|$ 的差。平行四边形的面积等于底乘以高, 所以, 考虑 P, Q 分别与 O, M 生成的平行四边形, 它们的面积之差等于高的差乘以底。而两者对应的高分别是 $|HQ|$ 与 $|PH|$ 。也就是说, P 到 l 的距离 d 是两个面积的差除以底的商:

$$d = \frac{|-c - (ax_P - (-b)y_P)|}{\sqrt{a^2 + (-b)^2}} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

另解: 首先把直线方程转为等垂式: $ax + by = -c$, 它表示与点 $M(a, b)$ 的内积为 $-c$ 的直线, 也就是垂直于 OM , 垂足 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{-c}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 的直线。作 P 到 OM 的垂线 l' , 记垂足为 H , 则 P 到 l 的距离就是 $|HQ|$, 也就是 $|OQ|$ 和 $|OH|$ 的差。 l 与 l' 垂直于同一条直线 OM , 因此平行或重合。于是 l' 的等垂式为 $ax + by = ax_P + by_P$, $\overrightarrow{OH} = \frac{T}{|OM|^2} \overrightarrow{OM} = \frac{ax_P + by_P}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 。于是 P 到 l 的距离为:

$$d = |\overrightarrow{HQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OH}| = \frac{|-c - (ax_P + by_P)|}{|OM|^2} |OM| = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

习题 1.3.1.

1. 根据已知条件, 写出直线的方程:

1.1. 过点 $(1, -3)$, 与 $(0.5, 2.1)$ 共轴。

1.2. 过点 $(2, -0.8)$ 、 $(-2, 2.5)$ 。

1.3. 过点 $(-1, 1)$, 与 $(-0.5, 1.5)$ 垂直。

1.4. 过点 $(-2.25, -6)$, 斜率为 -1.7 。

1.5. 与 $(4.5, -5)$ 内积为 -1.2 。

1.6. 与 $(5.6, 1)$ 面积为 -8 。

1.7. 与直线 $2x - y + 4$ 平行, 且过点 $(1, 1)$ 。

2. 求平行直线 $x - 3y + 1 = 0$ 和 $x - 3y - 4 = 0$ 的距离。

3. 两直线的方程分别为 $y = k_1x + b_1$ 、 $y = k_2x + b_2$, 证明: 两直线垂直, 当且仅当 $k_1k_2 + 1 = 0$ 。

思考 1.3.1.

1. 直线 l 按向量 P 平移得到直线 l' , l 和 l' 之间有什么关系?

2. 一次函数的直部与直线方程的头有什么关系?

1.4 圆的方程

圆是到一点距离相同的点的集合。用向量的语言来说, 设有以 $W(x_W, y_W)$ 为圆心、以正数 r 为半径的圆, 那么圆上的点 $P(x, y)$ 是方程:

$$|P - W| = r$$

的解集。直角坐标系中, 方程可以写为:

$$\sqrt{(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2} = r$$

根号中的值总大于等于零, 所以这个方程的解集就是方程

$$(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2 = r^2$$

的解集。我们把这个方程称为圆的**径心式**方程，它的解集就是以 W 为圆心、 r 为半径的圆。比如，

$$x^2 + y^2 = 4$$

表示圆心为 $(0, 0)$ 、半径为 2 的圆。

我们还可以通过其他直观性质来得到圆的方程。

点心式：已知 $W(x_W, y_W)$ 为圆心， $A(x_A, y_A)$ 为圆上一点，那么半径为 $\sqrt{(x_A - x_W)^2 + (y_A - y_W)^2}$ 。于是圆的方程为：

$$(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2 = (x_A - x_W)^2 + (y_A - y_W)^2.$$

我们把它称为圆的**点心式**方程。

直径式：已知 $A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 连成的线段为圆的直径，那么对圆上任一点 P ， $AP \perp BP$ ，因此两向量内积为 0。于是可得到方程：

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

我们把这个方程称为圆的**直径式**方程。比如，以两点 $(0, 0)$ 、 $(1, 2)$ 为直径的圆，方程为： $(x - 0)(x - 1) + (y - 0)(y - 2) = 0$ ，即 $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$ 。

例题 1.4.1. 求过点 $(1, 0)$ 、 $(0, 2)$ 、 $(-1, -1)$ 的圆的方程。

解答. 设圆的方程为

$$(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2 = r^2$$

三点都在圆上，因此都满足圆的方程，于是我们得到方程组：

$$\begin{cases} (1 - x_W)^2 + (0 - y_W)^2 = r^2 & (1) \\ (0 - x_W)^2 + (2 - y_W)^2 = r^2 & (2) \\ (1 + x_W)^2 + (1 + y_W)^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

分别计算 $(1) - (2)$ 、 $(1) - (3)$ ，得到另一个方程组：

$$\begin{cases} 1 - 2x_W = 4 - 4y_W \\ 1 - 2x_W = 1 + 2x_W + 1 + 2y_W \end{cases}$$

解这个方程组, 得到

$$\begin{cases} x_W = -0.5 \\ y_W = 0.5 \end{cases}$$

代入 (1), 得到 $r^2 = 2.5$ 。于是圆的方程为:

$$(x + 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = 2.5$$

例题 1.4.2. 过点 $P(1, 2)$ 的直线与圆 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 3$ 相切, 求直线方程。

解答. 设直线 l 过点 P , 且与圆 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 3$ 相切, 那么圆心 $W(-1, 1)$ 到 l 的距离平方为 3。将直线 l 写成点斜式: $y - 2 = k(x - 1)$, 其中斜率 k 是待定的未知数。将它写成等垂式:

$$kx + (-1)y = k - 2.$$

可以算出, W 到它的距离为 $\frac{|-k-1-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$ 。于是可以列出方程:

$$\frac{(-k - 1 - k + 2)^2}{k^2 + 1} = 3.$$

方程两边乘以 $k^2 + 1$, 并将所有项整理到等式左边, 得到:

$$k^2 - 4k - 2 = 0.$$

这是一个一元二次方程。解得斜率 $k = 2 + \sqrt{6}$ 和 $k = 2 - \sqrt{6}$, 分别对应方程: $y + (-2 + \sqrt{6})x - \sqrt{6} = 0$ 、 $y + (-2 - \sqrt{6})x + \sqrt{6} = 0$ 。经验证, W 到这两条直线的距离都是 $\sqrt{3}$ 。因此, 过点 $P(1, 2)$ 且与圆 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 3$ 相切的直线有两条, 方程为: $y + (-2 + \sqrt{6})x - \sqrt{6} = 0$ 、 $y + (-2 - \sqrt{6})x + \sqrt{6} = 0$ 。

习题 1.4.1.

1. 写出以 $(-3, 2)$ 为圆心, 半径为 5 的圆的方程。
2. 写出圆心为 $(-3, 2)$, 过 $(1, 1.3)$ 的圆的方程。
3. 写出以 $(1, -1)$ 为圆心, 过点 $(0, 4)$ 的圆的方程。

4. 直线过点 $(2, 5)$ ，且和点 $(0, 1)$ 的距离是 2.3，求直线的方程。
5. 直线 l 过点 $(4, 2)$ ，且和圆 $(x+1)^2 + (y-1.5)^2 = 4$ 相切。求直线 l 的方程和对应切点的坐标。

思考 1.4.1.

1. 给定实数 θ ，点 $(1 + 3\cos\theta, -2 + 3\sin\theta)$ 到 $(1, -2)$ 的距离是多少？
2. 如果点 $P(x_P, y_P)$ 到 $(1, -2)$ 的距离为 3，是否总存在实数 θ ，使得 $x_P = 1 + 3\cos\theta$ 、 $y_P = -2 + 3\sin\theta$ ？

1.5 平面形的变换

我们已经学习过一些平面形的变换。用向量的语言，我们可以把这些变换做一次总结。

首先，定义这样一类映射。它们把平面的点（向量）映射到平面的点。我们称之为平面的**点映射**。

平面形的变换，就可以看作点映射的效果。

具体来说，平面形作为平面的子集，经过点映射，变成平面的另一个子集，这就是平面形的变换。因此，我们也把平面的点映射称为平面上的**变换**。

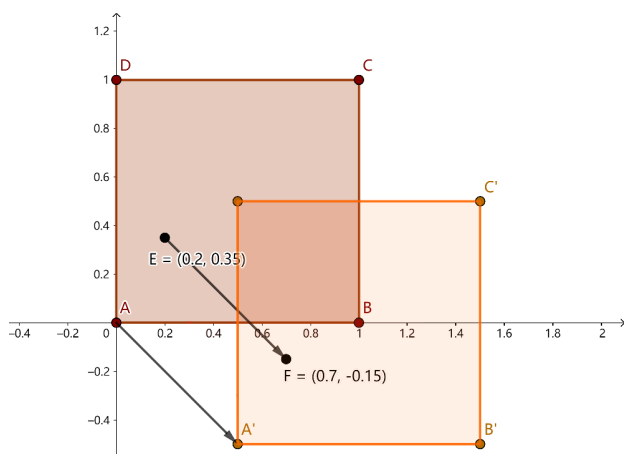
举例来说，设有平面 γ ，那么以下映射就是一个点映射：

$$\begin{aligned}\gamma &\rightarrow \gamma \\ P &\mapsto P + U\end{aligned}$$

它将平面上每一点 P 按向量 U （或者记作 $\mathbf{u}$ ）平移。

设 S 是以 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(0, 1)$ 为顶点的正方形（下面称为标准单位正方形）。 S 可以写作：

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$$



设 $U = (0.5, -0.5)$ ，那么点映射：

$$P \mapsto P + U$$

就把 S 映射成以 $(0.5, -0.5)$ 、 $(1.5, -0.5)$ 、 $(1.5, 0.5)$ 、 $(0.5, 0.5)$ 为顶点的正方形。我们知道，这样的点映射叫做**平移变换**。

从例子中可以看到，按向量 U 的平移变换可以表示为：

$$\begin{aligned} \text{Py}_U: \gamma &\rightarrow \gamma \\ P &\mapsto P + U \end{aligned}$$

平移变换不改变图形的大小和形状，只改变图形的位置。大部分的变换对图形的大小、形状和位置都有改变。比如给定一个长度为 1 的向量 U ，考虑以下变换：

$$T: (x, y) \mapsto (x, 0)$$

对平面中一点 $P(x_P, y_P)$ ， T 把它映射到 $(x_P, 0)$ ，也就是它到 x 轴的垂足。直观上，如果把 x 轴看作“地面”，想象光线从正上方照射，那么 T 把点映射到它在“地面”上的投影。我们把这样的变换称为**投影变换**。

更一般地来说，可以这样定义投影变换：

定义 1.5.1. 给定平面基底 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, 平面中任意向量 P 都能唯一表示成 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的直组合:

$$P = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}.$$

其中 a, b 是相应的分量。那么, 把 P 映射到 $a\mathbf{u}$ 的点变换

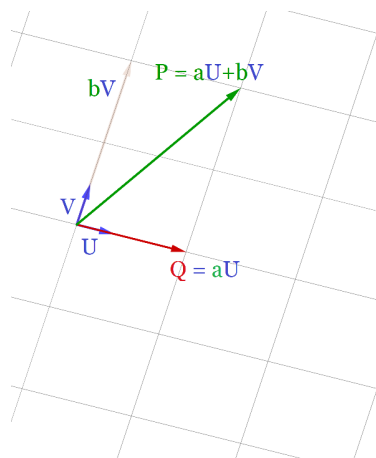
$$\begin{aligned} \text{投}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}: \gamma &\rightarrow \gamma \\ P &\mapsto a\mathbf{u} \end{aligned}$$

就称为沿 $\mathbf{v}$ 到 $\mathbf{u}$ 的**投影变换**。它把任何向量映射到直线 $\mathbb{R}\mathbf{u}$ 上。 $\mathbf{u}$ 称为 $\text{投}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ 的**方向向量**, $\mathbf{v}$ 称为**投影向量**。

直角坐标系中, 记基向量为 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 。上面的例子中, T 就是沿 $\mathbf{e}_y$ 到 $\mathbf{e}_x$ 的投影变换。

设 S 是标准单位正方形, S 中任一点 (x, y) 变换后为 $(x, 0)$ 。因此, S 变成从原点到 $(1, 0)$ 的线段。这就是标准单位正方形在 $(1, 0)$ 方向的投影。

T 的投影向量垂直于方向向量, 就好像正午的阳光一样。我们把这样的投影变换称为**正投影**。



沿 V 到 U 的投影变换

以上定义中, 没有说明怎样得到 a, b 。如果平面上定义了内积, 我们可以用内积求出 a, b 的值。已知 P 在基底 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 下的分解:

$$P = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}.$$

等式两边与 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 做内积, 得到:

$$\begin{cases} (\mathbf{u} | P) = a(\mathbf{u} | \mathbf{u}) + b(\mathbf{u} | \mathbf{v}) \\ (P | \mathbf{v}) = a(\mathbf{u} | \mathbf{v}) + b(\mathbf{v} | \mathbf{v}) \end{cases}$$

解这个关于 a, b 的二元一次方程组, 得到:

$$\begin{cases} a = \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{v})(\mathbf{u}|P) - (\mathbf{u}|\mathbf{v})(\mathbf{P}|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}|\mathbf{u})(\mathbf{v}|\mathbf{v}) - (\mathbf{u}|\mathbf{v})^2} \\ b = \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})(\mathbf{u}|P) - (\mathbf{u}|\mathbf{u})(\mathbf{P}|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}|\mathbf{v})^2 - (\mathbf{u}|\mathbf{u})(\mathbf{v}|\mathbf{v})} \end{cases}$$

也就是说, 投影变换可以写为:

$$\text{投}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}: P \mapsto \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{v})(\mathbf{u}|P) - (\mathbf{u}|\mathbf{v})(\mathbf{P}|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}|\mathbf{u})(\mathbf{v}|\mathbf{v}) - (\mathbf{u}|\mathbf{v})^2} \mathbf{u}.$$

如果 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 是标准直角坐标系的基底, 那么

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 0$$

$$(\mathbf{u}|\mathbf{u}) = (\mathbf{v}|\mathbf{v}) = 1$$

于是

$$\begin{cases} a = (\mathbf{u}|P) \\ b = (P|\mathbf{v}) \end{cases}$$

投影变换写为:

$$\text{投}_{\mathbf{u}}: P \mapsto (\mathbf{u}|P)\mathbf{u}.$$

同样考虑正投影。如果方向向量换成 $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 投影向量换成 $\mathbf{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。那么两者构成标准直角坐标系的基底。平面中的点 $P(x, y)$ 经过投影变换, 就变为

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}|P)\mathbf{u} &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\mathbf{u} \\ &= \left(\frac{x + \sqrt{3}y}{4}, \frac{\sqrt{3}x + 3y}{4}\right) \end{aligned}$$

也就是说, S 变为从原点到 $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$ 的线段。这就是标准单位正方形在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 方向的正投影。

我们学习过点和图形的轴对称。把图形变成它的轴对称图形，这样的变换叫做**反射变换**。

投影变换和反射变换有密切关系。给定长度为 1 的方向向量 $\mathbf{u}^{\textcircled{1}}$ ，平面中一点 P 以及它关于 $\mathbb{R}\mathbf{u}$ 的对称点 Q ，到 $\mathbf{u}$ 的正投影是重合的。设 P 到 $\mathbf{u}$ 的正投影为点 H ，则：

$$\overrightarrow{OH} = \text{投}_{\mathbf{u}}(P) = (\mathbf{u} | P)\mathbf{u},$$

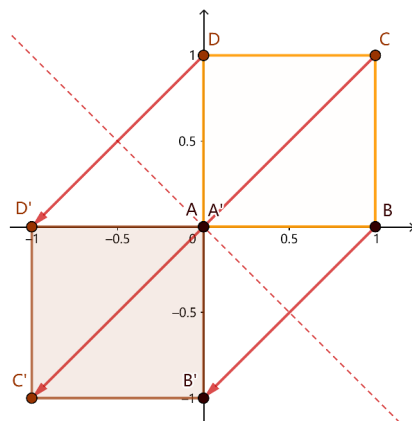
H 是 P 到 $\mathbb{R}\mathbf{u}$ 的垂足，而 $\overrightarrow{HP}$ 和 $\overrightarrow{HQ}$ 大小相等、方向相反。因此：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HQ} \\ &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{HP} \\ &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \\ &= (\mathbf{u} | P)\mathbf{u} + (\mathbf{u} | P)\mathbf{u} - P \\ &= 2(\mathbf{u} | P)\mathbf{u} - P\end{aligned}$$

也就是说，给定单位方向向量 $\mathbf{u}$ ，关于直线 $\mathbb{R}\mathbf{u}$ 的反射变换可以表示为：

$$\begin{aligned}\text{反}_{\mathbf{u}}: \gamma &\rightarrow \gamma \\ P &\mapsto 2(\mathbf{u} | P)\mathbf{u} - P\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{u}$ 是对称轴的单位方向向量。



举例来说，设方向向量为 $\mathbf{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，标准单位正方形经过关于

^①也叫做单位方向向量。

$\mathbb{R}\mathbf{u}$ 的轴对称变换, 点 $P(x, y)$ 变为

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{u} | P)\mathbf{u} - P &= 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) \mathbf{u} - P \\ &= (x - y, y - x) - (x, y) \\ &= (-y, -x) \end{aligned}$$

即它关于直线 $x + y = 0$ 的对称点。于是 $\text{反}_{\mathbf{u}}$ 将标准单位正方形变换为它关于 $x + y = 0$ 的对称图形, 即以 $(0, 0)$ 、 $(0, -1)$ 、 $(-1, -1)$ 、 $(-1, 0)$ 为顶点的正方形。

如果对称轴不过原点, 可以通过平移变换将它移到过原点的位置。比如, 设对称轴为 $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbf{v}$, 点 P 经过反射变换变为 Q , 则 $P - \mathbf{v}$ 和 $Q - \mathbf{v}$ 关于 $\mathbb{R}\mathbf{u}$ 对称。因此:

$$Q - \mathbf{v} = 2(\mathbf{u} | P - \mathbf{v})\mathbf{u} - P + \mathbf{v}.$$

也就是说, 一般的反射变换可以写成:

$$\begin{aligned} \text{反}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}: \gamma &\rightarrow \gamma \\ P &\mapsto 2(\mathbf{u} | P - \mathbf{v})\mathbf{u} - P + 2\mathbf{v}. \end{aligned}$$

更一般地来说, 可以这样定义反射变换:

定义 1.5.2. 给定平面基底 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, 平面中任意向量 P 都能唯一表示成 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的直组合:

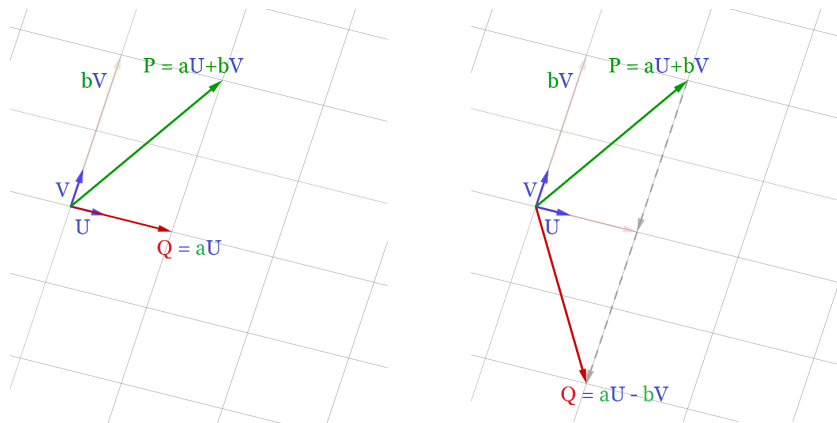
$$P = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}.$$

其中 a, b 是相应的分量。那么, 把 P 映射到 $a\mathbf{u}$ 的点变换

$$\begin{aligned} \text{投}_{\mathbf{u}}: \gamma &\rightarrow \gamma \\ P &\mapsto a\mathbf{u} - b\mathbf{v} \end{aligned}$$

就称为沿 $\mathbf{v}$ 到 $\mathbf{u}$ 的反射变换。

直观上, 沿 $\mathbf{v}$ 到 $\mathbf{u}$ 的反射变换和投影变换分别是:



投影变换 (左) 和反射变换 (右) 的关系

虽然这个定义已经脱离了轴对称, 直观上看, 仍然与投影变换有密切联系。如果 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 是标准直角坐标系的基底 (对应正投影), 以上定义的反射变换就是关于坐标轴的轴对称变换。

另一种简单的变换是**位似变换**。位似是一种特殊的相似关系。举例来说, 设 $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle A'B'C'$ 。如果直线 AA', BB', CC' 交于一点 U , 就说两个三角形位似, U 是**位似中心**。

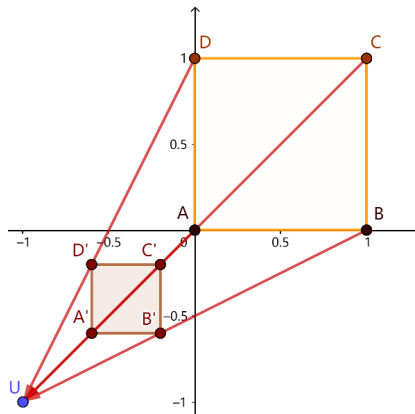
位似变换可以表示为:

$$W_{S_{U,k}}: \gamma \rightarrow \gamma$$

$$P \mapsto kP + (1-k)U$$

其中 U 是位似中心, k 是变换前后的相似比。我们说平面形以 U 为中心放缩, 变成原来 k 倍大小。

举例来说。设 S 是标准单位正方形, 四个顶点分别是 $A(0, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(1, 1)$ 、 $D(0, 1)$ 。指定位似中心 $U(-1, -1)$, 相似比 $k = 0.4$ 。于是位似变换中, A 变为



$A'(-0.6, -0.6)$, B 变为 $B'(-0.2, -0.6)$ 。

线段 AB 上一点 $(x, 0)$ 变为 $(0.4x - 0.6, -0.6)$ 。于是线段 AB 变成线段 $A'B'$ 。

同理线段 BC 、 CD 、 DA 变成线段 $B'C'$ 、

$C'D'$ 、 $D'A'$, 其中 $C' = (-0.2, -0.2)$, $D' =$

$(-0.6, -0.2)$ 。标准单位正方形 S 变成边长为 0.4 的正方形 $A'B'C'D'$ 。

最后来看**旋转变换**。旋转变换指的是以给定角的顶点为中心, 把某个图形按该角旋转。

首先来看一点的旋转。给定角 α , 顶点为 U 。平面中一点 P 关于 α 旋转的结果, 是唯一使得 $\angle PUQ = \alpha$ 且 $|UP| = |UQ|$ 的点 $Q^{\textcircled{1}}$ 。以 U 为圆心, 以 $|UP|$ 为半径作圆, 则 P 沿圆弧运动到 Q 。顶点 U 称为**旋转中心**, α 称为**旋转角**。

最简单的情况是 U 为原点。这时, 设点 P 的坐标为 (x_P, y_P) , $|UP| = r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ 。取 x 轴上的点 $S(1, 0)$ 为基准, 设 $\angle SUP = \theta$, 容易验证, $|x_P| = r|\cos \theta|$, $|y_P| = r|\sin \theta|$ 。对比各个象限中 x_P 、 y_P 和 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 的正负号, 可以发现: 任何情况下, x_P 总与 $\cos \theta$ 同正负, y_P 总与 $\sin \theta$ 同正负。

定理 1.5.1. 设 $P(x_P, y_P)$ 是平面上原点外一点, 设以 x 轴正半轴为始边、射线 OP 为终边的角为 θ , 则

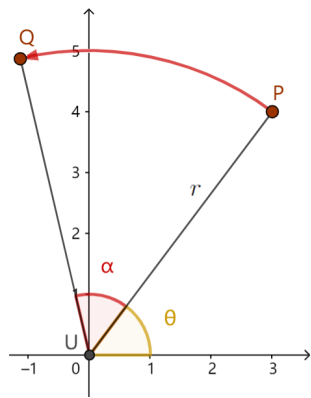
$$x_P = r \cos \theta, \quad y_P = r \sin \theta.$$

其中 $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ 。

这个定理将点的坐标和角度联系起来, 是我们讨论平面角度和旋转问题的关键。

如果将 P 按角 α 旋转, 那么与 x 轴正半轴张成的角应该从 θ 变为 $\theta + \alpha$ 。它的长度仍

^①如果 $P = U$, 则旋转后仍为 P 。



然是 r ，而角度是 $\theta + \alpha$ ，因此，它的坐标是 $(r \cos(\theta + \alpha), r \sin(\theta + \alpha))$ 。使用和角公式，可以将它转化为：

$$(r \cos \theta \cos(\alpha) - r \sin \theta \sin(\alpha), r \cos \theta \sin(\alpha) + r \sin \theta \cos(\alpha)).$$

用 x, y 表示，旋转变换就是：

$$(x, y) \mapsto (x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha), x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)).$$

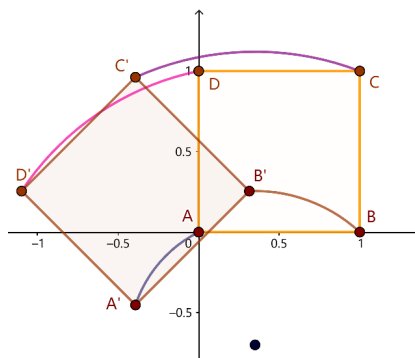
如果 U 不是原点，坐标是 (x_U, y_U) ，那么 $\overrightarrow{UP} = (x_P - x_U, y_P - y_U)$ 。 $\overrightarrow{UP}$ 旋转变为 $\overrightarrow{UQ}$ 的运动和前面类似。因此通过 $Q = U + \overrightarrow{UQ}$ 就可得到 Q 。于是旋转变换可以表示为：

$$\text{旋}_{(U, \alpha)}: \gamma \rightarrow \gamma$$

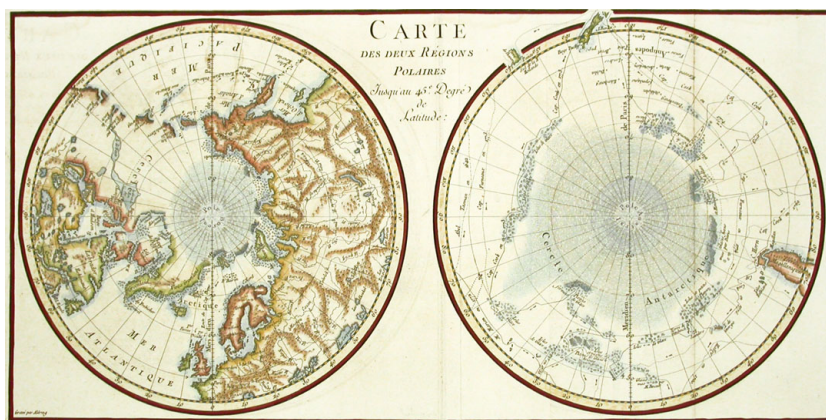
$$(x, y) \mapsto (x_U, y_U) + ((x - x_U) \cos(\alpha) - (y - y_U) \sin(\alpha), (x - x_U) \sin(\alpha) + (y - y_U) \cos(\alpha)).$$

可以看到，旋转变换的表示形式繁琐。这是向量和直角坐标系的性质决定的。

直角坐标系与向量的共轴性质和内积相关。共轴性质、内积的基本性质都只和向量的加法、数乘运算相关。而向量定义中的加法和数乘运算，分别对应平移和放缩变换。向量定义中并没有与旋转对应的运算，共轴性、内积的性质也不包括旋转，因此，要通过向量在直角坐标系下的坐标表示旋转，自然不是简单的事情。



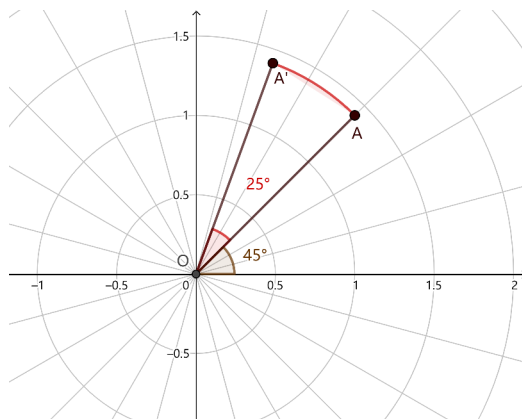
一种折中的方法是使用**极坐标系**。极坐标系是科学家研究南北极地时发明的。在南北极圈中，各条经线汇于极点。人们发现，使用到极点的距离和经度描述位置，比使用经纬度更精确、更方便。



使用极坐标系的极地地图

如下图所示，极坐标系由一条射线构成。这条射线上配备了单位向量，形成数轴的正半轴。为了方便起见，我们同样称它为 x 轴。一点 A 在极坐标系中的坐标称为极坐标，它由**模长**和**辐角**组成。模长就是点 A 到原点 O 的距离，辐角是 x 轴正半轴到 $\overrightarrow{OA}$ 的角。

比如，直角坐标系中的点 $(1, 1)$ ，在极坐标系中可以表示为 $(\sqrt{2}, 45^\circ)$ 。



使用极坐标系，可以比较方便地描述以原点为中心的旋转运动。比如，直角坐标系中，点 $(1, 1)$ 以原点为中心逆时针旋转 25° ，可以用极坐标系描述为：

$$(\sqrt{2}, 45^\circ) \mapsto (\sqrt{2}, 70^\circ)$$

然而，用极坐标系描述平移、反射等变换就比较复杂。用极坐标描述中心非原点的旋转变换，仍然繁琐。

思考 1.5.1.

1. 如何描述图形关于某点的中心对称变换？
2. 如何描述一般的相似变换？
3. 给定向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ，能否用 $\text{反}_{\mathbf{u}}$ 和 $\text{Ty}_{\mathbf{u}}$ 表示 $\text{反}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ ？
4. 如果平面中任两点之间的距离经过某个变换后都不变，就说这个变换是**保距变换**。本节提到的变换中，哪些变换是保距变换？
5. 如果平面中任意角经过某个变换后角度都不变，就说这个变换是**保角变换**。本节提到的变换中，哪些变换是保角变换？

习题 1.5.1.

1. 将标准单位正方形以原点为中心，按 45° 顺时针旋转，最终得到的图形是什么？
2. 设点 A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(0, 4)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(1, 1)$ 。
 - 2.1. 以原点为中心，把 $\triangle ABC$ 按 90° 顺时针旋转，然后以原点为中心，将其放大为原来的 3 倍，再按 $(-5, 0)$ 平移。最终得到的图形是什么？
 - 2.2. 把 $\triangle ABC$ 按 $\mathbb{R}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 作反射变换，再按 $(0, 6)$ 平移。最终得到的图形是什么？
 - 2.3. 以原点为中心，把 $\triangle ABC$ 分别按 30° 、 120° 顺时针旋转，然后投影到 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 方向上。最终分别得到什么图形？
3. 某工厂的机械臂要完成一个平面动作，可以简单描述为把端点为 $A(1, 2)$ 、 $B(-2, 1)$ 的线段，变换为端点为 $A'(-4, 4)$ 、 $B'(-4, -6)$ 的线段。机械臂可以进行 3 种操作：以原点为中心的旋转变换、按任一向量的平移变换、以线段一端为中心的位似变换。
 - 3.1. 请设计一种操作组合，把 AB 移动到 $A'B'$ 。
 - 3.2. 请设计一种操作组合，把 AB 移动到 $A'B'$ ，并确保 AB 的中点经过点 $(-2, -2)$ 。
 - 3.3. 已知机械臂的每种操作成本。旋转变换的成本与线段中点经过的距离成正比，每单位长度 0.65 元；平移变换的成本和平移距离成正比，每

单位长度 0.4 元；位似变换的成本和变换前后线段长度的差值成正比，每单位长度 0.8 元。请设计一种操作方式，使成本最低。

3.4. 同上，如果要确保 AB 的中点经过点 $(-2, -2)$ ，那么怎样操作成本最低？

第二章 平面中的运动

在前面的学习中，我们已经接触过运动的概念。比如，我们说点运动形成了线。这一章我们来初步讨论各种和运动相关的问题。

2.1 轨迹

我们知道，点运动形成线，而直线和线段是最简单的“线”。因此，我们从直线和线段开始定义运动。

给定数轴上的线段 XY 以及线段上的点 P ，定义线段上的运动为一种二元关系（两个元素之间的关系）： $A \triangleright B$ ，表示点 P 运动时经过的先后，称为**运动的先后关系**。如果点 P 运动时先经过点 A 再经过点 B ，就记为 $A \triangleright B$ 。 P 运动时经过的点的集合，称为它的**轨迹**。运动的先后关系 $\triangleright$ 有以下性质：

- $A \triangleright B$ 和 $B \triangleright A$ 至少有一个成立。
- 如果 $A \triangleright A$ ，那么必有 $B \neq A$ ，使得 $A \triangleright B$ 且 $B \triangleright A$ 。
- 如果 $A \triangleright B$ 、 $B \triangleright C$ ，则 $A \triangleright C$ 。

如果轨迹中某点 S 使得对轨迹中任何点 A 都有 $S \triangleright A$ ，就说 S 是**运动的起点**。如果轨迹中某点 T 使得对轨迹中任何点 A 都有 $A \triangleright T$ ，就说 T 是**运动的终点**。

如果用数轴上的数来代表这些点，那么不难验证，常见的“小于”（<）和“大于”（>）关系都满足这些要求。当 $\triangleright$ 是 < 时，我们把这个运动称为“从左到右沿 XY 运动”；当 $\triangleright$ 是 > 时，我们把这个运动称为“从右到左沿 XY 运动”。

比如，令 $X = (0, 0)$ 、 $Y = (1, 0)$ ，那么从左到右沿 XY 运动，就是实数 a 从 0 不断增大到 1 时，点 $(a, 0)$ 的轨迹。如果实数 $a < b$ ，点 P 就先经过 $(a, 0)$ ，后经过 $(b, 0)$ 。

从右往左沿 XY 运动则恰好相反，是实数 a 从 1 不断减小到 0 时，点 $(a, 0)$ 的轨迹。如果实数 $a > b$ ，点 P 就先经过 $(a, 0)$ ，后经过 $(b, 0)$ 。

这样定义的运动，不仅可以定义在线段上，也可以定义在直线上。比如，考虑数轴所在直线 l ，那么“从左到右沿 l 运动”就对应“小于”关系，“从右到左沿 l 运动”就对应“大于”关系。直线上定义的运动和线段上定义的运动，区别在于前者没有起点和终点，后者有起点和终点。

对一般的运动来说，要说明先后关系 $\triangleright$ 并不容易。我们采用映射的方法来描述。如果某运动有起点 S 和终点 T ，轨迹为 $\mathcal{C}$ ，我们可以把它和沿数轴上的线段 $[0; 1]$ 从左到右的运动对应起来。定义映射 f ：

$$\begin{aligned} f : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

其中 t 表示沿 $[0; 1]$ 从左到右的运动中经过的点，而 $f(t)$ 就是它对应在该运动中的点。 $f(0)$ 就是起点 S ， $f(1)$ 是终点 T 。 $\mathcal{C} = \{f(t) | t \in [0; 1]\}$ ，一般记作 $f([0; 1])$ 。

举例来说，给定起点 $(-2, 1)$ 和终点 $(1, 3)$ ，如果我们要描述一个点沿以它们为端点的线段运动，则可以用以下映射表示：

$$\begin{aligned} g : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (-2 + 3t, 1 + 2t) \end{aligned}$$

可以验证, $f(0) = (-2, 1)$, $f(1) = (1, 3)$, 且 $[0; 1]$ 中的数对应的点都在线段上。

如果运动没有起点和终点, 那么可以把它和沿数轴直线左到右的运动对应起来:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

要注意的是: 运动的起点和终点相同, 轨迹并不一定相同。比如, t 沿 $[0; 1]$ 从左到右运动时, 运动

$$h: t \mapsto (-2 + 2t + t^2, 1 + 2t)$$

的起点和终点也分别是 $(-2, 1)$ 和 $(1, 3)$, 但 g 和 h 对应的轨迹并不一样。 $h(0.5) = (0.25, 2)$, 而 g 不经过 $(0.25, 2)$ 。

思考 2.1.1.

1. 运动的先后关系满足的性质中, 第二条应该如何理解? 能否去掉?
2. 如何定义只有起点没有终点的运动? 只有终点没有起点的运动呢?
3. 比较两个运动: $\forall t \geq 0$, $f_1: t \mapsto (1 - \frac{1}{t+1}, 0)$, 和 $\forall t \in [0; 1]$, $f_2: t \mapsto (t, 0)$ 。这两个运动有什么相同和不同之处?

习题 2.1.1.

1. 给定点 $A(1, 0)$ 、 $B(-1, 2)$, 描述沿线段 AB 的运动。
2. 描述一个从 $A(1, 0)$ 到 $B(-1, 2)$, 并经过 $(0, 0)$ 的运动。
3. 描述一个起点和终点都是 $(0, 1)$, 且经过 $(-1, -2)$ 的运动。
4. 描述一个没有起点和终点, 经过 $(2, 1)$ 和 $(1, 4)$ 的运动。
5. t 沿 $[0; 1]$ 从左到右运动时, $f: t \mapsto (t^2 - t + 1, t + 1)$ 是什么运动?

2.2 变与不变

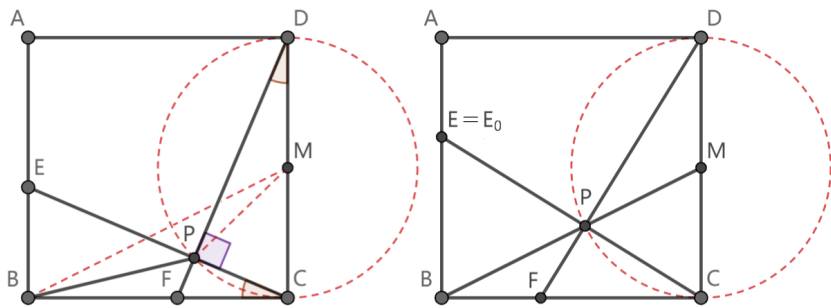
运动是对变化的描述。以下运动中, 哪些量变了, 哪些没变?

- $t \mapsto (3t + 1, 4), t \in [0; 1]$ 。
- $t \mapsto (\cos t, \sin t), t \in [0; 180^\circ]$ 。
- $t \mapsto (1 - 2t, 2 - t), t \in [0; 180^\circ]$ 。

第一个运动中, 随着 t 变化, 横坐标在变, 纵坐标不变。第二个运动中, 随着 t 变化, 纵横坐标在变, 但两者的平方和总是 1, 即点到 $(0, 0)$ 的距离不变。第三个运动中, 随着 t 变化, 纵横坐标在变, 但纵坐标的两倍与横坐标的差总是 3, 即“纵坐标的两倍与横坐标的差”不变。

运动中保持不变的量, 称为运动的**不变量**。在变化中保持不变的量, 很可能对我们理解事物的本质有帮助。

例题 2.2.1. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 8。点 E 沿边 AB 从 A 往 B 运动。在 BC 有一点 F , 使得 $|AE| = |BF|$ 。 CE 、 DF 交于点 P 。求 $|BP|$ 的最小值。

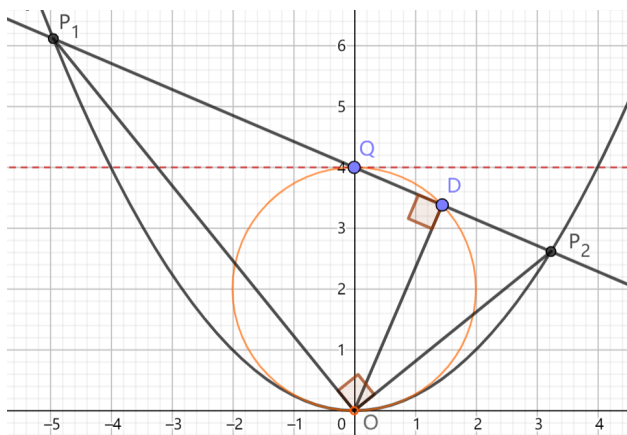


解答. 任何时刻, 总有 $\triangle EBC \simeq \triangle FCD$ 。因此 $\angle PCB = \angle PDC$, $\angle CPD$ 为直角。这说明 P 总在以 CD 为直径的圆上, 即 E 运动时, P 到 CD 中点 M 的距离总为 4。也就是说, $\triangle BPM$ 中, $|PM| = 4$ 、 $|BM| = 4\sqrt{5}$ 都是定值。于是

$$|BP| \geq |BM| - |PM| = 4\sqrt{5} - 4.$$

这个最小值是可以达到的。作以 CD 为直径的圆, 和线段 BM 交于点 Q 。延长 CQ 与 AB 交于 E_0 , 则 E 运动到 E_0 时, $P = Q$, 这时 B, P, M 三点共轴, 因此 $|BP| = |BM| - |PM|$, 达到最小值。

例题 2.2.2. 如图, 点 P_1 在抛物线 $y = \frac{x^2}{4}$ 上从左到右运动。直线 OP_2 垂直于 OP_1 , 并且和抛物线交于点 P_2 。过原点 O 作 P_1P_2 的垂线, 垂足为 D 。当 P_1 运动时, 求点 D 的轨迹。



解答. 选几个不同的 P_1 点, 作对应的直线 P_1P_2 。通过观察, 可以发现这些点和 y 轴似乎交于同一点。猜测这是一个不变量。给定 P_1 , 连接 P_1P_2 , 交 y 轴于点 Q 。设直线 OP_1 的斜率为 a , 则它的方程为

$$y = ax.$$

和抛物线方程联立求解, 得到 P_1 坐标为 $(a, \frac{a^2}{4})$ 。设直线 OP_2 斜率为 b , 则它的方程为

$$y = bx.$$

同理解得 P_2 坐标为 $(b, \frac{b^2}{4})$ 。于是 P_1P_2 的两点式方程为:

$$(x - a) \left(\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right) - \left(y - \frac{a^2}{4} \right) (b - a) = 0$$

令 $x = 0$, 就得到直线 P_1P_2 和 y 轴交点的纵坐标: $y_Q = -\frac{ab}{4}$ 。由于 $OP_1 \perp OP_2$, 两者的方向向量内积为 0。分别选方向向量 $(1, \frac{a}{4})$ 、 $(1, \frac{b}{4})$, 就得到 $1 + \frac{ab}{16} = 0$, 即 $ab = -16$ 。代入 Q 的纵坐标, 就得到 $y_Q = 4$ 。即 P_1P_2 与 y 轴的交点总是 $Q(0, 4)$ 。

过 O 作 P_1P_2 的垂线, 垂足为 D , 那么 $\triangle ODQ$ 是直角三角形, $\angle ODQ$ 是直角。因此 D 总在以 OQ 为直径的圆: $x^2 + y(y - 4) = 0$ 上。

另一方面, 给定以 OQ 为直径的圆上一点 $D \neq Q$, 连接 DQ , 交抛物线于两点: P_1, P_2 。 DQ 的两点式方程为:

$$(x - x_D)(4 - y_D) - (y - y_D)(0 - x_D) = 0.$$

将 $y = \frac{x^2}{4}$ 代入, 得到关于 x 的一元二次方程:

$$\frac{x_D}{4}x^2 + (4 - y_D)x - 4x_D = 0.$$

只要 $x_D \neq 0$, 二次方程的判别式:

$$(4 - y_D)^2 - 4 \cdot \frac{x_D}{4} \cdot (-4x_D) = (4 - y_D)^2 + 4x_D^2 > 0.$$

于是方程总有两个解。它的两个解就是 P_1, P_2 的横坐标 a, b 。因此根据根与系数的关系, P_1, P_2 的横坐标乘积为

$$ab = -4x_D \div \frac{x_D}{4} = -16.$$

而 P_1, P_2 的纵坐标分别是 $\frac{a^2}{4}, \frac{b^2}{4}$, 于是两直线方向向量的内积为:

$$ab + \frac{a^2}{4} \cdot \frac{b^2}{4} = ab(1 + \frac{ab}{16}) = 0.$$

即 $OP_1 \perp OP_2$ 。

如果 $D = Q$, 则 OD 垂直于抛物线上两点: $P_1(-4, 4)$ 和 $P_2(4, 4)$ 的连线。可以验证 $OP_1 \perp OP_2$ 。于是点 Q 也在轨迹上。

综上所述, 一方面 D 的轨迹总在以 OQ 为直径的圆上。另一方面, 除了原点 O , 以 OQ 为直径的圆都在 D 的轨迹上。因此, D 的轨迹是圆:

$$\{(x, y) \mid x^2 + y(y - 4) = 0, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

习题 2.2.1.

1. 设 c 为正实数, k 是大于 1 的实数。考虑平面上的点 $C_+ = (c, 0)$ 和直线 $l_+ : x = k^2c$ 。考虑集合:

$$T = \left\{ P \mid \frac{P \text{ 到 } l_+ \text{ 的距离}}{|PC_+|} = k \right\}.$$

1.1. 证明: T 包含点 $(ck, 0)$ 、 $(-ck, 0)$ 。

1.2. 记 $C_- = (-c, 0)$ 。 $P = (x, y)$ 是 T 中一点。证明:

$$|PC_-|^2 - |PC_+|^2 = 4cx.$$

1.3. 证明: P 到直线 $l_- : x = -k^2c$ 的距离是 P 到 C_- 距离的 k 倍。

1.4. 考虑集合:

$$S = \{P \mid |PC_+| + |PC_-| = 2ck\}.$$

证明: $T = S$ 。

2.3 运动的速度

生活中, 我们常用快慢来描述运动。比如, 从商店回家, 骑自行车比走路更快; 从某城市到另一个城市, 坐飞机比开汽车更快。等等。我们用长度来刻画事物的长短。对于运动的快慢, 我们也希望用某种方法来具体描述。

定义 2.3.1. 设 P 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中某个点的运动:

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto P(t) \end{aligned}$$

给定两数 $t_1 < t_2$, 则 P 在区间 $[t_1; t_2]$ 上的速度是:

$$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

显然，这里的自变量是日常生活中时间概念的抽象，我们一般认为自变量属于某个数轴，称为**时间轴**，称具体的 t 为**时刻**，轴上的区间为**时间段**。而以上定义的速度是某个时间段 $[t_1; t_2]$ 上的速度，也称为这段时间的**平均速度**。它是两个量的商。作为被除数的 $P(t_2) - P(t_1)$ 是平面上的向量，从 t_1 时刻所在的点指向 t_2 时刻所在的点，表示点在这段时间的位置的改变量，或者说移动情况，因此称为点（在该时间段的）**位移**。作为除数的 $t_2 - t_1$ 是时长。

换句话说，某段时间里，**点运动的（平均）速度等于位移除以时长**。

类似的定义还出现在很多地方。比如，材料科学中，会考虑温度的改变对材料电阻的影响。实践中，考虑电阻率关于温度的函数：

$$\begin{aligned} R: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto R(t) \end{aligned}$$

这里的自变量是温度，而应变量是电阻率 R 。可以认为温度作为变量也属于某个数轴，如果我们试图描述温度改变时电阻率 R 改变的快慢，那么可以尝试用类似的方式描述：

$$\frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

其中 $t_1 < t_2$ 表示起始和最终温度， $R(t_2) - R(t_1)$ 就是温度从 t_1 增加到 t_2 时电阻率的改变量。

要注意的是，以上两个例子中，时间作为自变量，增长是不可逆的，而温度是可上升也可下降的。因此，两者并不完全等同。但我们在讨论变化的快慢时，用到了同样的方法，即用映射的应变量的改变量除以自变量的改变量。我们把这个比率称为实变映射（在某个区间上的）**变率**。

定义 2.3.2. 实变映射的变率 设 f 是定义在实数集上的映射，给定实数 $t_1 < t_2$ ，则 f 在 $[t_1; t_2]$ 上的**变率**是：

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

速度可以用来描述一段时间内运动的状态。最容易想到的是这样的运动：任意时间段的速度都是一样的。我们把这样的运动称为**匀速运动**。显然，如果时间轴是整个数轴，匀速运动的轨迹就是直线。直线的方向向量就是速度向量。记匀速运动的速度为 $\mathbf{v}$ ，则时间段 $[t_1; t_2]$ 里，位移就是 $(t_2 - t_1)\mathbf{v}$ 。设点在初始时刻 t_0 的位置是 P_0 ，则它在 t 时刻的位置是：

$$P(t) = P_0 + (t - t_0)\mathbf{v}.$$

对于上面电阻率的例子来说，电阻率 R 随温度的变化也可以是匀速的。如果经实验证明，在某个温度范围 I 内，给定任意温度 $t_1, t_2 \in I$ ，变率

$$\frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1}$$

都等于某个常数 q ，就说相关材料的电阻率是匀速变化的。如果已知物体在某个温度 $t_0 \in I$ 下的电阻率为 R_0 ，那么，对任意 $t \in I$ ，

$$R(t) = R_0 + q(t - t_0).$$

再来看另一类简单的运动：给定圆 $\odot(O, r)$ ，点从 $(r, 0)$ 出发，逆时针方向沿圆周运动。这时，我们发现，任意时间段里的位移方向一直在改变。为此，我们改为研究点经过的**路程**。

路程是物体某段时间内运动轨迹的长度。它是一个数，而不是向量。显然，同样的位移，可以通过走不同的路来达到，而对应轨迹的长度是不一样的。也就是说，同样的位移可以对应不同的路程。

路程，作为时间的函数，可以定义其变率。我们把路程关于时间的变率叫做**速率**，和速度相区别。它们的主要区别和路程与位移的区别是一样的。速率是数，而速度是向量。

对于圆周运动，我们可以讨论它的速率，就是运动的路程关于时间的变率。最简单的圆周运动，任意时间段的速率是定值。我们把这样的运动叫做**匀速圆周运动**。要注意的是，这里的“速”指“速率”。

在上面的例子中, 我们可以假设运动的速率总是 a 。 t_0 时刻, 点从 $(r, 0)$ 出发, 于是点在 t 时刻经历的路程为 $a(t - t_0)$ 。也就是说, 物体沿圆周走过的弧长为 $a(t - t_0)$ 。于是, $t = \frac{2\pi r}{a} + t_0$ 时, 点走过的路程为 $2\pi r$, 即转动了一周。

我们可以把这个路程换算成点对应的向量和 t_0 时的向量的夹角。这样, 我们就得到角度关于时间的函数 θ :

$$\theta: t \mapsto \frac{a(t - t_0) \cdot 360^\circ}{2\pi r} = \frac{a(t - t_0) \cdot 180^\circ}{\pi r}.$$

注意到角度关于时间的变率也是常数:

$$\frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi r}.$$

我们把这个变率称为圆周运动的**角速率**, 把弧长对应的速率 a 称为**线速率**。圆周运动的线速率和角速率成正比。角速率不变的圆周运动是匀速圆周运动。

角速率在描述多个点的圆周运动时比较方便。比如, 几个点绕着同一个圆心作圆周运动, 但半径不相同。这时, 考虑各个点的角速率, 就容易理解点之间的关系。

思考 2.3.1.

1. 除了上文给出的例子, 你还能说出哪些有意义的变率?
2. 我们常说“某个时刻的速度”, 这种说法和以上定义的速度是否冲突? 你觉得可以怎样定义“某个时刻的速度”?

习题 2.3.1.

1. 点 P 沿单位圆逆时针运动, $t = 0$ 时从 $(1, 0)$ 出发, $t = 3$ 时到达 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。这段时间里, 它的位移是多少? 经过的路程是多少? 平均速度、线速率和角速率分别是多少?
2. 给定平面上的极坐标系。 $t = 0$ 时, 点 P 从 $(1, 0)$ 出发。它的模长

和辐角是关于时间的函数：

$$r : t \mapsto 1 + 2t^2 - 2.4t,$$

$$\theta : t \mapsto 120^\circ t.$$

2.1. $[0; 3]$ 这段时间里，点 P 的位移是多少？平均速度、平均角速率分别是多少？

2.2. 圆 C 以原点为圆心，半径为 4.2。 P 的轨迹与圆 C 有几个交点？在什么时刻相交？求交点的坐标。

第三章 从平面到立体

我们已经初步了解了简单平面图形的性质。下面我们来认识立体形状。

我们生活的世界是立体空间。人类自身和自然万物，都是立体的。立体形状是我们最常接触的形状。不过，人类的眼睛和大脑并不能直接处理立体形状，只能感知立体事物的平面图像，在大脑中还原事物的形状。因此，人类总是通过平面图像来了解立体事物，通过平面图像还原、表现现实。



平面图像与现实

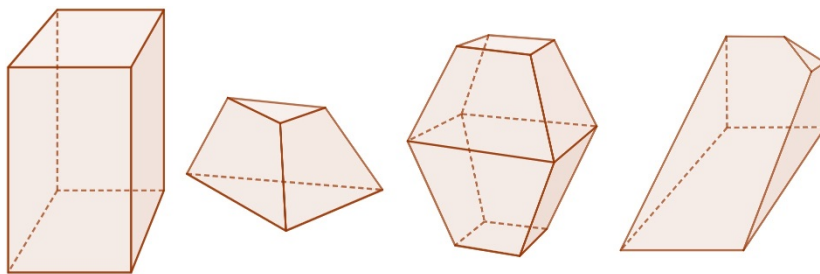
3.1 多面体

观察以下的物品，它们有什么相似之处？



如果立体形状是几个平面围成的，就说它是**多面体**。多面体的每个面都是多边形。

我们按照多面体的面数来称呼它。比如，由四个面围成的多面体叫四面体，由九个面围成的多面体叫九面体。



多面体相邻两面相交的部分总是线段，这些线段叫做**多面体的棱**。三条或以上的棱，交会在共同的端点上，这些点也是多面体相邻的几个面的共同点，称为**多面体的顶点**。

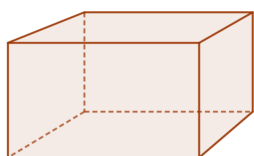
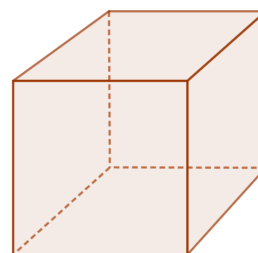
数一数，上图中的多面体各有几个面？有几条棱？有几个顶点？

思考 3.1.1.

1. 日常生活中,你还见过哪些多面体?
2. 多面体的顶点有没有可能只是两条棱的共同端点?
3. 多面体相邻两面的交点是否一定是线段? 多面体的棱有没有可能是三个或以上的相邻面的共同部分?

下面来认识几种特殊的多面体。

右图中的多面体由六个正方形组成。它叫做**正方体**或**正六面体**。观察正方体,你能总结出什么特征?

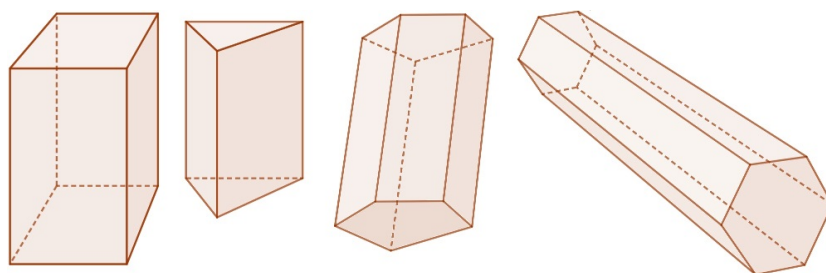


把正方体按某条棱的方向延长或压缩,得到的多面体叫做**长方体**。正方体就是一种特殊的长方体。显然,长方体也是六面体。观察长方体,你能总结出什么特征?

思考 3.1.2.

1. 正方体有几条棱? 棱与棱之间有什么关系?
2. 正方体有几个顶点? 顶点与顶点之间有什么关系?
3. 正方体是否是对称形状? 你能说出正方体的哪些对称性质? 长方体呢?

观察下图中的多面体,它们有什么共同特征?



把一个多边形朝指定方向平移,可以得到多面体。这样的多面体叫做**棱柱**。平移的多边形叫做**棱柱的底面**。其它面叫做**棱柱的侧面**。

思考 3.1.3.

1. 棱柱的侧面有什么特征?

2. 正方体和长方体是棱柱吗?

3. 你能说出生活中见过的棱柱吗?

4. 《九章算术》刘徽注:“邪(斜)解立方得两堑堵,邪解堑堵,其一为阳马,一为鳖臑,阳马居二,鳖臑居一,不易之率也。合两鳖臑成一阳马,合三阳马而成一立方,故三而一。”其中的“立方”就是正方体。已知“堑堵”和“阳马”是五面体、“鳖臑”是四面体,自行探究:刘徽说的“堑堵”、“阳马”、“鳖臑”分别是什么? 如何理解刘徽说的话?

3.2 旋转体和球

观察以下的物品,它们有什么相似之处?



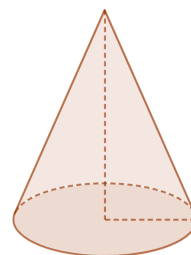
如果立体形状是某个平面图形绕着定轴旋转一周而成的,就说它是**旋转体**。

多面体可以是旋转体吗?

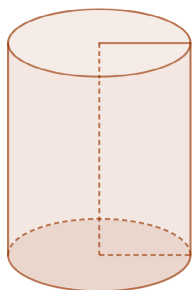
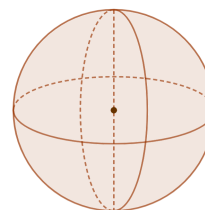
任何点绕定轴旋转一周,必然形成一个圆。考虑多面体表面的点,它们旋转之后是否能留在所属的平面上?

观察右图中的旋转体，它有几个面？它的面和多面体的面有什么不同？

直角三角形绕着直角边所在的直线旋转一周，形成的立体形状叫做**圆锥**。圆锥有两个面，一个面是平的，一个面是曲面。我们把平的面叫做**圆锥的底面**，把曲面叫做**圆锥的侧面**。侧面的顶端叫做**圆锥的锥顶**。



矩形绕着它某条边所在的直线旋转一周，形成的立体形状叫做**圆柱**。圆柱有三个面，其中两个面是平的，一个面是曲面。我们把平的面叫做**圆柱的底面**，把曲面叫做**圆柱的侧面**。



圆形绕着过圆心的直线旋转一周，形成的立体形状叫做**球**或**球体**。球只有一个面，叫做**球面**。

思考 3.2.1.

1. 日常生活中，你还见过哪些旋转体？
2. 圆锥、圆柱的底面是什么形状？为什么？
3. 圆柱和棱柱有什么相似之处？能不能用别的方式定义圆柱？

义圆柱？

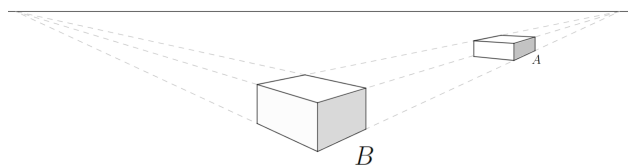
4. 圆锥、圆柱和球是否是对称形状？你能说出它们的哪些对称性质？

3.3 在平面上表示立体形状*

让我们在平面上还原我们看到的立体事物。为什么下图中的 A 显得远， B 显得近？

大脑还原事物的形状时，遵循“近大远小”的规律。

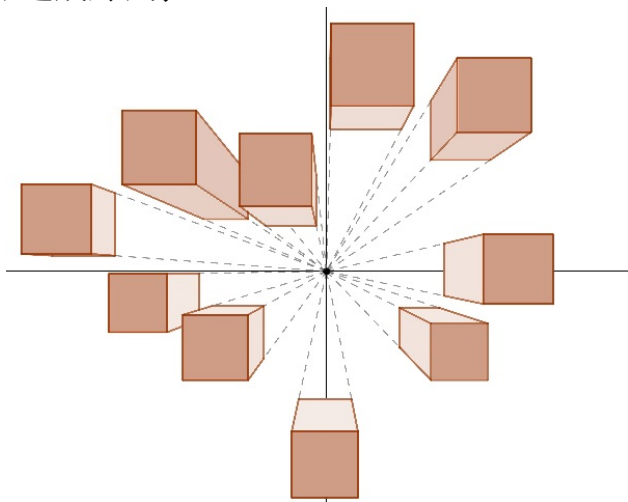
同一个物体，离眼睛越远，就显得越小；离眼睛越近，就显得越大。



近大远小

在平面中，可以使用“近大远小”的方法，表现立体事物的远近。这种表现方法称为**透视法**。在平面中表现立体形状的技法，叫做**作图法**，因为传统上，我们用画图的方法来表示现实世界中的立体形状。大部分写实绘画的作图法中都会用到透视法，让平面中表现的立体景象显得更真实。

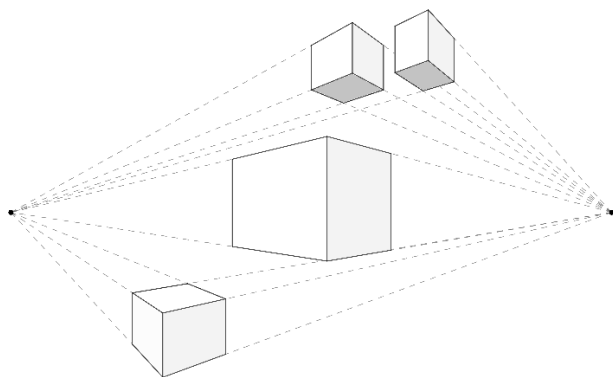
透视法有两个基本要诀，一个是“近大远小”，另一个是“向前缩短”。“近大远小”我们已经介绍过了，“向前缩短”指的是往远方的线并不会真的无限延伸，因此会显得比实际长度短一些。“向前缩短”可以说是“近大远小”和人的视力有限造成的现象。



单点透视

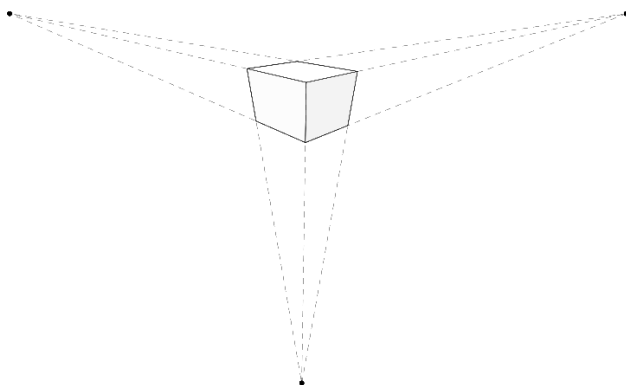
最简单的透视法是**直线透视法**。直线透视法认为，现实世界中的平行线，在平面作图时会交于同一点，即便在图中没有相交，其延长线也一定交于同一点。这个点代表着我们的视力能看到的最远极限，叫做**灭点**或**消失**

点。灭点可以是一个、两个或三个。对应的透视法称为单点透视、两点透视和三点透视。



两点透视

观察单点透视、两点透视和三点透视的图画，你觉得图中哪些线是现实世界中的平行线？相比现实，它们有什么变化？



三点透视

思考 3.3.1.

1. 如何理解“近大远小”现象？请试着将学过的知识推广到立体空间中，来解释“近大远小”现象。
2. 如何理解单点透视、两点透视、三点透视之间的区别和联系？为什么它们都可以反映真实的立体景象？你觉得哪种透视更接近真实？
3. 你还知道哪些透视法？自行探究并比较各种透视法，它们和以上介绍的透视法有什么不同？

第四章 同余

例子 4.0.1. 7^{65} 的个位数是多少?

解答. 从 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \dots$ 开始找规律. $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$. 7^4 和 7^0 的个位数都是 1, 7^5 和 7^1 的个位数都是 7. 我们可以总结出这样的规律: 个位数是 1 的, 乘以 7 得到 7; 个位数是 7 的, 乘以 7 得到 9; 个位数是 9 的, 乘以 7 得到 3; 个位数是 3 的, 乘以 7 得到 1。

也就是说, 如果把 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \dots$ 的个位数写成一列, 应该是这个样子的:

$$1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, \dots$$

用归纳法不难证明, 这列数字以 4 为周期不断重复。所以, 要求 7^{65} 的个位数, 可以看 65 在相关的周期里处于哪个位置。换句话说, 只要看 65 除以 4 的余数。 $65 = 16 \times 4 + 1$, 所以 7^{65} 的个位数和 7^1 的个位数一样, 都是 7。

从这个例子可以看出, 两个整数除以同一个数得到相同的余数, 是一个重要的性质。我们把这种性质称为**同余**。比如, 65 和 1 除以 4 余数都是 1, 我们就说 65 和 1 模 4 同余, 记为:

$$65 \stackrel{4}{\equiv} 1.$$

7^{65} 和 7^1 除以 10 余数都是 7, 我们说 7^{65} 和 7^1 模 10 同余, 记为:

$$7^{65} \stackrel{10}{\equiv} 7^1.$$

4.1 同余类

整数除以 3, 余数有 0, 1, 2 三种可能。整数除以 10, 余数有 $0, 1, \dots, 9$ 十种可能。一般来说, 给定正整数 n , 整数除以 n , 余数有 $0, 1, \dots, n-1$ 这 n 种可能。因此, 按除以 n 的余数, 可以把整数集分成 n 类。同属一类的数, 模 n 同余, 所以这 n 类数叫作模 n 同余类。所有模 n 同余类的集合, 叫作模 n 同余系。

每个模 n 同余类, 可以写成 $\{kn + a \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 的形式。也就是说, 可以看成某个数 a 不断加上或减去 n 得到的所有数的集合。这个集合是无穷的。

不同的模 n 同余类, 交集是空集, 并集是 $\mathbb{Z}$ 。也就是说, 它们是 $\mathbb{Z}$ 的分划。

为了方便, 我们从每个模 n 同余类中选一个元素, 代表这个同余类。一般来说, 可以选 $0, 1, \dots, n-1$ 个数。我们给它们加个上划线, 以便和作为整数的 $0, 1, \dots, n-1$ 区分:

$$\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$$

如果要强调 n , 可以把 n 加在右上角:

$$\bar{0}^n, \bar{1}^n, \dots, \overline{n-1}^n$$

举例来说, 当 $n = 3$ 时, 我们可以把全体整数分为三个模 3 同余类, 分别记作 $\bar{0}$ 、 $\bar{1}$ 、 $\bar{2}$, 它们分别表示除以 3 余数是 0、1、2 的三类整数。比如说, $\bar{1}$ 就表示集合 $\{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 也就是 1, 4, 7, $\dots$ 这样的数的集合。而这三个模 3 同余类的集合: $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, 就叫做模 3 同余系。

给定整数 m , 我们可以把它对应到某个模 n 同余类, 称为对 n 取模。比如 $n = 5$ 时, $24 \stackrel{5}{\equiv} 4$, 我们把 24 对应到 $\bar{4}^5$, 或者说, 24 对 5 取模, 得 $\bar{4}^5$ 。

同余关系和相等关系很像，它们是否有一样的性质呢？我们可以验证，同余关系满足以下的性质：

- $\forall a \in \mathbb{Z}, a \stackrel{n}{\equiv} a$;
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \stackrel{n}{\equiv} b$, 那么 $b \stackrel{n}{\equiv} a$;
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \stackrel{n}{\equiv} b, b \stackrel{n}{\equiv} c$, 那么 $a \stackrel{n}{\equiv} c$ 。

满足以上三个性质的二元关系称为**等价关系**。数与数的相等关系是一种等价关系，数与数的同余关系也是一种等价关系。我们可以把数与数的同余关系看作同余类之间的相等关系。

定义 4.1.1. 给定正整数 n ，如果模 n 同余类 $\bar{a}$ 中任意元素与同余类 $\bar{b}$ 中任意元素同余，就说模 n 同余类 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 相等。

整数之间有四则运算，模 n 同余类之间，也可以进行运算。以 $n = 5$ 为例子。我们分别计算 24 和 37 除以 5 的余数，以及它们的和 61 除以 5 的余数：

$$24 \stackrel{5}{\equiv} 4, 37 \stackrel{5}{\equiv} 2, 61 \stackrel{5}{\equiv} 1$$

可以发现： $4 + 2 \stackrel{5}{\equiv} 1$ ，也就是说，取模和加法可以交换顺序。可以验证，两个同余类中各取一个元素相加，和所在的同余类，就是两者模 n 余数的和所在的同余类。用集合的语言，可以写成：

$$\{kn + a + ln + b \mid k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\} = \{kn + a + b \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

所以，可以定义同余类的加法：

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

其中的 $\overline{a + b}$ 指的是 $a + b$ 所在的同余类。为了方便，我们用 $a + b$ 作为代表。

可以验证，同余类的加法也满足结合律和交换律。这里我们只证明同余类的加法满足结合律，交换律的证明留做习题：

证明： 由上可知 $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$, 所以

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b} + \bar{c} = \overline{a + b + c}.$$

类似可得：

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b + c} = \overline{a + b + c}.$$

于是

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b + c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

□

类似可以定义同余类的减法和乘法：

$$\bar{a} - \bar{b} = \overline{a - b}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

可以验证，同余类的减法性质和整数减法一样，同余类的乘法也满足结合律、交换律和分配律。

能否定义同余类的除法呢？我们来看一个例子。设 $n = 6$ ，考虑等式 $12 \div 4 = 3$ 。12、4 和 3 分别对 6 取模，得到 0、4 和 3。考虑等式 $60 \div 10 = 6$ 。60、10 和 6 分别对 6 取模，得到 0、4 和 0。也就是说，两个模 6 同余类中各取元素相除，商所在的同余类不是唯一的。所以，我们没法定义模 6 同余类的除法。

再看另一个例子。设 $n = 5$ ，考虑以下的“乘法表”：

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

可以看出，任何模 5 同余类乘以 $\bar{0}$ 都得到 $\bar{0}$ ，非 $\bar{0}$ 同余类乘以不同的同余类，结果也不同。这说明每个同余类除以另一个同余类（非 $\bar{0}$ ），都必然有唯一的结果。这样我们就定义了模 5 同余系里的除法。

习题 4.1.1.

动手做一做：

1. 证明同余关系满足等价关系所要求的三个性质。
2. 证明同余类的加法满足交换律。
3. 证明同余类的减法是加法的逆运算。
4. 证明同余类的乘法满足结合律和交换律。
5. 证明同余类的乘法满足分配律。
6. 证明：如果某模 n 同余类的代表与 n 的最大公因数是 d ，则其中所有元素与 n 的最大公因数都是 d 。
7. 分别画出模 3 同余系和模 4 同余系的“乘法表”。它们和模 5 同余系的“乘法表”哪些地方相同，哪些地方不同？

4.2 完全同余系和简化同余系

上一节我们提到模 6 同余系无法定义除法，而模 5 同余系可以定义除法。两者有什么不同呢？我们画出模 6 同余系的“乘法表”：

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

可以看到, 这个“乘法表”和模 5 同余系的大有不同。同一行或同一列常有重复。这说明不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果。比如

$$\bar{2} \times \bar{4} = \bar{5} \times \bar{4} = \bar{2}.$$

这就使我们没法定义除法。

如果我们把上面的等式稍作变化, 会得到:

$$\bar{0} = (\bar{5} - \bar{2}) \times \bar{4} = \bar{3} \times \bar{4}.$$

也就是说, 有非 $\bar{0}$ 的同余类相乘等于 $\bar{0}$ 。同余类乘法的这个性质和整数乘法完全不同。我们把这种非 $\bar{0}$ 同余类叫做**零因子**。整数中没有零因子: 非 0 的整数相乘必然不是 0。而只要有这种零因子存在, 同余系中就会发生“不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果”的现象, 从而无法定义除法。

有什么办法在模 6 同余系中定义除法呢? 我们可以选一部分同余类, 在其中定义除法。如果同余类 $\bar{a}$ 的代表 a 与 6 不互素, 设最大公因数是 b , 那么

$$\frac{a}{b} \times 6 = a \times \frac{6}{b}$$

于是有 $\bar{a} \times \bar{\frac{6}{b}} = \bar{0}$, 出现零因子。因此, 为了避免零因子问题, 我们只选和 6 互素的数所在的同余类, 也就是 $\bar{1}$ 和 $\bar{5}$ 。我们发现 $\{\bar{1}, \bar{5}\}$ 中可以定义乘法和除法 (但不再满足加减法)。

$\times$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$

我们把模 6 同余系称为模 6 的**完全同余系**, 把 $\{\bar{1}, \bar{5}\}$ 称为模 6 的**简化同余系**。

一般来说, 我们把模 n 同余系称为模 n 的**完全同余系**, 在其中可以定

义加减法和乘法；把其中所有和 n 互素的同余类的集合称为模 n 的简化同余系^①。

定理 4.2.1. 给定正整数 n ，在模 n 的简化同余系中可以定义乘法和除法。

证明： 模 n 同余类的乘法已经定义好了。我们只需要说明：简化同余系中的同余类相乘，仍然在简化同余系中。这是因为与 n 互素的整数相乘，结果还是与 n 互素。

接下来定义除法。除法是乘法的逆运算。比照数的除法： $a \div b = a \times \frac{1}{b}$ 。因此，只要将简化同余系中每个同余类都对应一个“倒数”，就可以用“乘以倒数”来定义除法。

我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表，记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系的元素个数。考虑任一元素 b_i ，我们接下来会证明： $b_i b_1, b_i b_2, \cdots, b_i b_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。于是，它们中恰有一个模 n 余 1。设 $b_i b_j \stackrel{n}{\equiv} 1$ ，那么 b_j 就是 b_i 的“倒数”。

最后用反证法证明命题： $b_i b_1, b_i b_2, \cdots, b_i b_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。

反设命题不成立，即存在 b_j, b_k 使得 $b_i b_j \stackrel{n}{\equiv} b_i b_k$ 。这说明 $n | b_i(b_j - b_k)$ 。由于 b_i 和 n 互素，根据倍和析因定理，存在整数 p, q ，使得：

$$b_i p + n q = 1.$$

两边乘以 $b_j - b_k$ ，就得到：

$$b_i(b_j - b_k)p + nq(b_j - b_k) = b_j - b_k.$$

等式左边是 n 的倍数，因此 b_j 和 b_k 模 n 同余，这与它们的定义矛盾。

因此命题的否定为假，原命题为真。 □

^①通常不把 $\bar{0}$ 计入简化剩余系，以省去讨论除以 $\bar{0}$ 的问题。

简化同余系的除法和整数不同,任何同余类都能整除另一个同余类,不需要余数、带余除法的概念。每个同余类都有自己的“倒数”,比如在模 6 简化同余系中, $\bar{5} \times \bar{5} = \bar{1}$ 。我们把同余类的“倒数”称为它的(乘法)逆。

习题 4.2.1.

1. 写出模 12 的简化同余系。写出 $\bar{7}^{12}$ 的逆。
2. 比较模 12 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法,它们有何异同?
3. 写出模 10 的简化同余系。写出 $\bar{7}^{10}$ 的逆。
4. 比较模 10 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法,它们有何异同?
5. 给定素数 n , 写出模 n 简化同余系。

4.3 方余定理

与模 n 简化同余系密切相关的一个定理是方余定理^①。

定理 4.3.1. 方余定理 设 a 是模 n 简化同余系中某个同余类中的元素, 则:

$$a^{\varphi(n)} \stackrel{n}{\equiv} 1$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系中同余类的个数。

比如, 模 10 简化同余系有 4 个元素: $\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}$ 。7 属于同余类 $\bar{7}$, 则 $7^4 \stackrel{10}{\equiv} 1$ 。

证明: 我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表, 记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

^①这个定理也称为欧拉定理。但以欧拉命名的定理太多了。为了避免混淆, 这里不采用。

它们两两不同余。把它们各自乘以 a , 得到 $\varphi(n)$ 个整数: $ab_1, ab_2, \dots, ab_{\varphi(n)}$ 。前面我们已经证明了, 它们仍然两两不同余。

这说明这 $\varphi(n)$ 个整数也分别代表模 n 简化同余系中的各个同余类。

考虑乘积: $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$ 。 $(ab_1)(ab_2) \cdots (ab_{\varphi(n)})$ 和它同余。也就是说:

$$b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)} \stackrel{n}{\equiv} (ab_1)(ab_2) \cdots (ab_{\varphi(n)}) \stackrel{n}{\equiv} a^{\varphi(n)} b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}.$$

由于 $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$ 也与 n 互素, 我们把等式两边除以 $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$, 就得到:

$$a^{\varphi(n)} \stackrel{n}{\equiv} 1.$$

□

如果 n 是素数, 那么 $1, 2, \dots, n-1$ 都和它互素, 于是模 n 的简化同余系就是 $\{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, $\varphi(n) = n-1$ 。根据方余定理, 只要 a 不是 n 的倍数, 就有:

$$a^{n-1} \stackrel{n}{\equiv} 1.$$

这个结论也叫做费马小定理。

习题 4.3.1.

1. 给定素数 n , 证明:

1.1. 除了 $\overline{1}$ 和 $\overline{n-1}$, 其它同余类的逆都不是自己。

1.2. $(n-1)! \stackrel{n}{\equiv} -1$.

2. 设 a 与 n 互素, 称使得 $a^m \stackrel{n}{\equiv} 1$ 的最小正整数 m 为 a 模 n 的阶。

2.1. 证明 a 的阶整除 $\varphi(n)$ 。

2.2. 如果 a 的阶等于 $\varphi(n)$, 就说 a 是模 n 的原根。证明: 如果 a 是模 n 的原根, 那么模 n 简化同余系可以写成: $\{\overline{a^0}, \overline{a^1}, \dots, \overline{a^{\varphi(n)-1}}\}$ 。

2.3. 找出所有模 7 的原根。

第五章 数据和概率

之前，我们学习了用概率来讨论不确定的事件。如何判断某件事情将来会不会发生？我们需要通过已有的知识和经验来分析。数据就是我们对已有知识和经验的总结、提炼。通过分析数据，我们可以讨论不确定的事件发生的概率。

5.1 实验和样本

为了研究我们关心的问题中某些随机事件发生的规律，我们会特意设计**实验**，布置相关条件，并观察发生的事件，记录结果。每次实验，我们得到的结果就是一个数据样本。比如，为了研究投骰子各面朝上的规律，我们设定骰子的大小、材料和形制，设计投掷的高度，并观察投掷结果。这就是一个实验。

实际中，很多问题并不是人类有能力设计、布置必要条件的，但我们仍然关心其中随机事件发生的规律，比如台风、地震、火山爆发等等。因此，我们假设大自然设计了相关的实验，框定一些假设条件，并观察发生的事件，记录结果。我们称之为广义的实验。比如，为了研究我们所在地区的降雨情况，我们观察每天是否降雨，记录降雨量，就是一次广义的实验。为了研究方便，我们会假设记录地点代表了所在地区（比如全市）的平均降雨情况，或者设定每天降雨量为早上 8 点到次日早上 8 点之间的记录量等等，

但我们无法完全控制实验的条件。

一次大实验可以包含几个小实验。比如，我们可以把连续记录一周的日降雨量称为一次实验，也可以把每天的记录称为一次实验。为了好说话，我们会区分**单一实验**和**复合实验**。如何区分，取决于我们关心的问题的性质和我们的研究方法。比如，体检中，我们可以把测量每个学生身高、体重、血压和肺活量合称为一个单一实验，这样，测量 100 个学生就是复合实验。如果我们关心的是这些学生的整体状况，我们可以认为这是 1 次复合实验，其中每个学生的测量称为单一实验。如果我们关心的是某个学生的状况，那么我们可以重复测量这个学生 100 次，称为复合实验，其中每次测量称为单一实验。

实验中，我们观察某些事件发生的情况，把我们关心的部分用数据记录下来，这样就得到一个数据样本。这样记录的叫做实验的**终态**或**结果**。所有可能的终态构成的集合称为**终集**。终态是终集的元素。

5.2 随机变量

一般来说，我们把实验的每个结果关联到某个方便理解的数值，作为数据记录。这样的映射，称为**随机映射**或**随机变量**。比如，设计抛掷硬币的实验，每次投掷如果正面向上，就规定结果是 1，否则规定结果是 0。那么我们可以把投掷结果用随机变量表示：

$$h : \{\text{正面}, \text{反面}\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$h(\text{正面}) = 1$$

$$h(\text{反面}) = 0$$

随机变量 h 把终态“正面”映射到 1，把终态“反面”映射到 0。

又比如，为了研究投骰子各面朝上的规律，我们设计投掷骰子的实验，每次投掷的结果是朝上的数字，我们约定，每次投掷骰子，得到的收益是这

个数值的 10 倍。如果数字 2 朝上，就获得 20 元；数字 5 朝上，就获得 50 元，等等。则我们可以把每次投掷骰子的收益用随机变量表示：

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} &\rightarrow \{10, 20, 30, 40, 50, 60\} \\ i &\rightarrow 10 \times i \end{aligned}$$

随机变量 f 把终态 1 映射到 10，把终态 2 映射到 20，把终态 3 映射到 30，等等。

一般来说，设试验的终集为 S ，如果某个映射把终集里的每个终态映射到另一个集合 X 里，就说这个映射是 S 上的 X -随机映射或随机变量。如果集合 X 是有限集或有理数集的子集，就说随机变量是**离散**的；如果集合 X 是实数集或区间，就说随机变量是**连续**的。

我们把随机变量背后随机事件的概率分布，称为**随机变量的分布**或随机变量遵循的分布。可以看出，随机变量的性质与其分布有关。随机变量的分布如何具体影响随机变量呢？我们来看两个例子。

例子 5.2.1. 考虑这样的映射 $\mathbb{E}$ ：它将离散随机变量 f 映射为

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{s \in S} f(s) \mathbb{P}(\{s\}).$$

这个映射称为**随机变量的期望**。比如，对以上掷骰子试验的随机变量 f ，它的期望为：

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^6 10 \cdot i \mathbb{P}(\{i\}).$$

如果投骰子的分布是均匀分布，那么对任何 i ， $\mathbb{P}(\{i\})$ 总是 $\frac{1}{6}$ ，于是：

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^6 \frac{10 \cdot i}{6} = 35.$$

如果 1 朝上的概率是 50%，其他数字朝上的概率都是 10%，那么：

$$\mathbb{E}(f) = 10 \cdot 1 \cdot 50\% + \sum_{i=2}^6 \frac{10 \cdot i}{10} = 25.$$

随机变量分布改变，它的期望也可能改变。

例子 5.2.2. 考虑这样的映射 Var ：它将离散随机变量 f 映射为

$$\text{Var}(f) = \sum_{s \in S} (f(s) - \mathbb{E}(f))^2 \mathbb{P}(\{s\}).$$

这个映射称为**随机变量的方差**。比如，对以上掷骰子试验的随机变量 f ，它的期望为：

$$\text{Var}(f) = \sum_{i=1}^6 (10i - \mathbb{E}(f))^2 \mathbb{P}(\{i\}).$$

如果投骰子的分布是均匀分布，那么对任何 i ， $\mathbb{P}(\{i\})$ 总是 $\frac{1}{6}$ ，于是 $\mathbb{E}(f) = 35$ ，因此：

$$\text{Var}(f) = \sum_{i=1}^6 \frac{(10i - 35)^2}{6} = \frac{875}{3} \approx 291.67$$

如果 1 朝上的概率是 50%，其他数字朝上的概率都是 10%，那么 $\mathbb{E}(f) = 25$ ，因此：

$$\mathbb{E}(f) = (10 \cdot 1 - 25)^2 \cdot 50\% + \sum_{i=2}^6 \frac{(10 \cdot i - 25)^2}{10} = 325$$

随机变量分布改变，它的方差也可能改变。

另一种表示随机变量分布的方法，是**概率质量函数**。概率质量函数从随机变量的值出发描述它遵循的分布，把 X 中元素值映射到“随机变量等于该值”这一事件的概率。比如，投掷骰子的随机变量 f 的分布，可以用以下的概率质量函数表示：

$$\begin{aligned} p_f : \{10, 20, 30, 40, 50, 60\} &\rightarrow [0; 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(\{s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid f(s) = x\}) \end{aligned}$$

概率分布不同，随机变量 f 的概率质量函数也不同。例如，投骰子的分布是均匀分布时， $p_f(10) = \frac{1}{6}$ ；如果 1 朝上的概率是 50%，那么 $p_f(10) = \frac{1}{2}$ 。

概率质量函数是另一种描述随机变量的方法，可以看作如何描述随机变量的值的分布，因此，我们也把概率质量函数叫做随机变量的值遵循的分布，或者随机变量值的分布。

使用概率质量函数，也可以表示随机变量的期望和方差。对 X 中每个元素 x ，考虑使 $f(s) = x$ 的 s 。我们发现：

$$\begin{aligned}\sum_{f(s)=x} f(s)\mathbb{P}(\{s\}) &= \sum_{f(s)=x} x\mathbb{P}(\{s\}) \\ &= x \sum_{f(s)=x} \mathbb{P}(\{s\}) \\ &= x\mathbb{P}(\{s \in S \mid f(s) = x\}) \\ &= xp_f(x)\end{aligned}$$

因此，随机变量 f 的期望

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{s \in S} f(s)\mathbb{P}(\{s\}) = \sum_{x \in X} xp_f(x).$$

这是因为当 x 遍历 X 时，使 $f(s) = x$ 的 s 也遍历了 S ，没有重复也没有遗漏^①。

同理可以推出，随机变量 f 的方差可以写成：

$$\text{Var}(f) = \sum_{x \in X} (x - \mathbb{E}(f))^2 p_f(x).$$

如何理解随机变量的期望和方差呢？

首先来看期望。随机变量的期望可以看作一种对实验结果预期的描述。举例来说，考虑以上掷硬币的实验的随机变量 h 。假设硬币正面朝上的概率是 p ，那么 h 的期望是：

$$\mathbb{E}(h) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

^①不至于混淆时， $p_f(x)$ 也写作 $\mathbb{P}(f = x)$ 。

于是，期望越大，表示 p 越大，说明掷硬币越可能正面朝上；反之说明掷硬币更可能反面朝上。又比如，考虑以上掷骰子的实验的随机变量 f 。假设各面朝上的概率分别是 $p_1, p_2, \dots, p_6$ ，那么 f 的期望是：

$$\mathbb{E}(f) = 10p_1 + 20p_2 + \dots + 60p_6.$$

如果 p_1 接近于 1，其它概率接近 0，那么 $\mathbb{E}(f)$ 接近于 10，即预期收益和 1 点向上的收益相近。如果 p_1 接近于 5，其它概率接近 0，那么 $\mathbb{E}(f)$ 接近于 50，即预期收益和 5 点向上的收益相近。

一般来说，随机变量的期望是一种方便的描述预期结果的方法，和平均数很像。和平均数的区别在于，随机变量的期望和各个终态的概率有关。概率越大的终态，对期望的影响越大，反之亦然。如果把各个终态看作已知数据，那么这种描述数据的方法就是**加权平均数**。加权平均数是指对每个数据值乘以一个系数（称为权重）来描述它的“重要程度”，然后求和，最后除以权重之和。要注意区分的是：随机变量的期望和数据的加权平均数的区别在于，随机变量的期望是一种预估方法，根据终态的概率估计预期结果，而数据的加权平均是对已知数据的描述方法。虽然两者的计算方式相同，但它们的含义不同。

再来看方差的作用。在投骰子的例子里，考虑以下两种概率分布：

- $p_1 = p_6 = 40\%$, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 5\%$ 。
- $p_3 = p_4 = 40\%$, $p_1 = p_2 = p_5 = p_6 = 5\%$ 。

两种情况下，随机变量的期望相同，都是 35，但显然这两种分布有很大区别。而方差可以描述这两种分布的区别。计算两种情况的方差，分别得到 525 和 85。可以观察到，期望相同的情况下，分布的方差越大，结果远离期望值的概率越大，方差越小，结果远离期望值的概率越小。随机变量的方差和数据的方差计算方法相同，但它们的含义不同。随机变量的方差是对预期结果的描述方法，而数据的方差是对已知数据的描述方法。

通过期望和方差，我们可以对概率分布有粗略的了解。

思考 5.2.1.

1. 概率映射和随机变量有什么不同?
2. 比较随机变量的期望和样本数据的平均数。它们有什么相似之处? 有什么不同?
3. 比较随机变量的方差和样本数据的方差。它们有什么相似之处? 有什么不同?
4. 随机变量的分布改变, 它的期望一定改变吗?
5. 随机变量的分布改变, 它的方差一定改变吗?
6. 随机变量的期望和方差的不同写法有哪些要注意的地方? 你觉得每种写法好在哪里?

习题 5.2.1.

1. 小李投掷一枚 1 元硬币, 约定正面向上则小王给小李 10 元钱, 否则小王给小李 1 元钱。
 - 1.1. 假设硬币正面向上的概率是 47%, 试将小王给小李的钱数用相关的随机变量表示。
 - 1.2. 该随机变量的分布是什么分布?
 - 1.3. 写出该随机变量的概率质量函数。
 - 1.4. 写出该随机变量的期望和方差。
2. 投掷一枚骰子, 假设 1 点向上和 5 点向上的概率分别是 40%, 其余点数向上的概率是 5%, 如果以点数的 3 倍为随机变量, 求它的期望和方差。
3. X 是 $\mathbb{Q}$ 的子集。证明 S 上的 X -随机变量 f 的方差也可以写成:

$$\text{Var}(f) = \mathbb{E}(f^2) - \mathbb{E}(f)^2.$$

其中 f^2 表示把每个终态 s 映射到 $f(s)^2$ 的随机变量。

5.3 条件概率和独立事件

讨论随机事件，总要知道前提条件。只有明确了前提条件，才能讨论事件的概率。为了研究不同的前提条件对事件的影响，我们引入**条件概率**的概念。

仍以“明天杭州是否下雨”为例。我们讨论台风“凤凰”动向对下雨概率的影响，可以说：“如果台风靠近，那么下雨的概率有 90%”、“如果台风转向，那么不下雨的概率为 40%”。这里我们把台风靠近与否作为明天杭州下雨的前提条件。以上两句话可以记作：

$$\mathbb{P}(\{\text{下雨}\}|\{\text{台风靠近}\}) = 0.9, \quad \mathbb{P}(\{\text{不下雨}\}|\{\text{台风转向}\}) = 0.4$$

这个记法称为条件概率。其中分隔符“|”左边是结果对应的事件，右边是前提条件对应的事件，合起来表示在前提条件下，结果发生的概率。

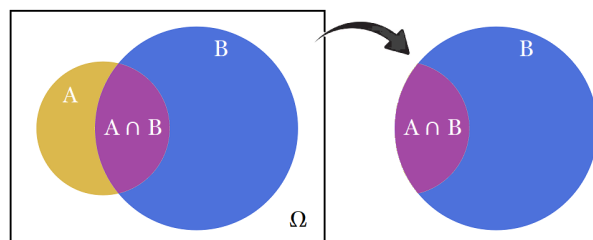
如果台风靠近，那么不下雨的概率是 10%；如果台风转向，那么下雨的概率是 60%。我们也可以把这些概率用表格的形式表示：

条件	下雨	不下雨
台风靠近	90%	10%
台风转向	60%	40%

可以看到，台风靠近与否，会影响明天杭州下雨的概率。如果把台风“凤凰”的动向视为一个实验，把“明天杭州是否下雨”视为另一个实验，我们也可以说，前一个实验影响了后一个实验的结果。

条件概率和概率之间的联系是怎样的呢？观察下图，可以发现，在假定事件 B 发生的条件下，发生事件 A 的条件概率，就是 A, B 同时发生的概率，除以事件 B 的概率。用公式表达出来，就是：

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$



把“ B 发生”作为前提条件， A 发生的概率，就是 A, B 同时发生的概率，除以 B 发生的概率

我们称 $\mathbb{P}(A|B)$ 为“ B 时 A 的概率”。要注意的是，这个公式没有考虑 $\mathbb{P}(B) = 0$ 的情况。如果 B 的概率是 0，那么讨论 B 发生时 A 的概率比较困难。这时我们暂时不定义条件概率 $\mathbb{P}(A|B)$ 。

从映射的角度来看，从事件 A 到 B 时 A 的概率形成这样一个映射：

$$A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$$

可以验证，这个映射也是一个概率映射，叫作关于 B 的条件概率映射。我们一般把这个映射记为 $\mathbb{P}_B$ 或 $\mathbb{P}(\cdot|B)$ （其中的 $\cdot$ 表示自变量的位置）。

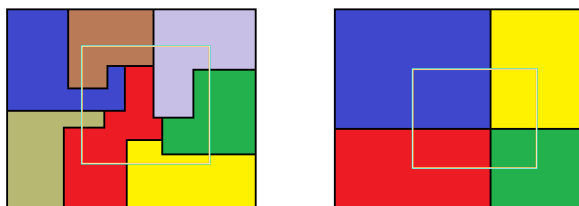
再来看另一个例子：有面值为 5 角和 1 元的硬币各一枚。首先抛出 1 元硬币，再抛出 5 角硬币，把 1 元硬币抛掷结果看作 5 角硬币抛掷结果的前提条件。假设 1 元硬币正面朝上时，5 角硬币正面朝上的概率是 60%，反面朝上的概率是 40%；1 元硬币反面朝上时，5 角硬币正面朝上的概率是 60%，反面朝上的概率是 40%。可以用表格表示条件概率：

条件	5 角正面朝上	5 角反面朝上
1 元正面朝上	60%	40%
1 元反面朝上	60%	40%

可以看到，1 元硬币抛掷结果，不影响 5 角硬币各面朝上的概率。“抛

掷 1 元硬币”这个实验的结果，不影响“抛掷 5 角硬币”实验的结果。

如果两个实验的结果互不影响，就说两者**相互独立**。一般来说，当我们讨论实验中发生的事件时，也说两个事件相互独立。



前提条件可能会改变不同事件发生的概率，也可能不会改变

如果事件 A, B 相互独立，那么 B 时 A 的概率应该和 A 的概率一样。也就是说，

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

即：

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

同样地，

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B).$$

多个事件之间也可能相互独立。给定 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，如果它们的交集的概率等于各自概率的乘积：

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n),$$

就说它们相互独立。

例题 5.3.1. 一共有 1000 个灯泡，其中有 k 个次品。从中随机抽取 10 个检验，发现有 3 个次品。 k 最有可能多少？

解答. 记事件“10 个抽检灯泡里有 3 个次品”为 Y 。把不同的 k 作为条件，求出条件下发生事件 Y 的概率，然后比较找出使得条件概率最大的 k 。

设 1000 个灯泡中有 k 个次品, 那么事件 Y 的条件概率是:

$$\mathbb{P}(Y | k) = \frac{C_k^3 \cdot C_{1000-k}^7}{C_{1000}^{10}} = \frac{\frac{k!}{3!(k-3)!} \cdot \frac{(1000-k)!}{7!(993-k)!}}{\frac{1000!}{990! \cdot 10!}} = \frac{10! \cdot 990!}{3! \cdot 7! \cdot 1000!} \cdot \frac{k!(1000-k)!}{(k-3)!(993-k)!}$$

比较 $\mathbb{P}(Y | k)$ 和 $\mathbb{P}(Y | k+1)$ 的大小, 可以发现两者比值为:

$$\frac{\mathbb{P}(Y | k)}{\mathbb{P}(Y | k+1)} = \frac{\frac{k!(1000-k)!}{(k-3)!(993-k)!}}{\frac{(k+1)!(999-k)!}{(k-2)!(992-k)!}} = \frac{(k-2)(1000-k)}{(k+1)(993-k)}$$

可以看到, k 很小 (比如 $k=3$) 的时候, 比值小于 1; k 很大 (比如 $k=992$) 的时候, 比值大于 1。实际上,

$$\frac{(k-2)(1000-k)}{(k+1)(993-k)} - 1 = \frac{10k - 2993}{(k+1)(993-k)}$$

因此 $k < 300$ 时比值小于 1, 而 $k \geq 300$ 时比值大于 1。这说明概率 $\mathbb{P}(Y | k)$ 从 k 很小的时候开始不断增大, 至 $k=300$ 时达到最大值, 而从 $k=301$ 起逐渐减小。

因此, k 最有可能是 300。

习题 5.3.1.

1. 证明: $\mathbb{P}(A | B) + \mathbb{P}(A^{\circ} | B) = 1$ 。
2. 证明: 如果事件 A_1, A_2 互斥, 那么 $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 | B) = \mathbb{P}(A_1 | B) + \mathbb{P}(A_2 | B)$ 。
3. 证明: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | B^{\circ})\mathbb{P}(B^{\circ})$ 。
4. 证明全概率公式: 如果 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 两两互斥, 且并集为全集, 那么 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2)\mathbb{P}(B_2) + \dots + \mathbb{P}(A | B_k)\mathbb{P}(B_k)$ 。
5. 证明: $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | B^{\circ})\mathbb{P}(B^{\circ})}$ 。
6. 证明反条件概率公式: 如果 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 两两互斥, 且并集为全集, 那么

$$\forall i \in [1, k], \quad \mathbb{P}(B_i | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A | B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2)\mathbb{P}(B_2) + \dots + \mathbb{P}(A | B_k)\mathbb{P}(B_k)}.$$

7. 抛掷两枚硬币，假设两次抛掷互不影响，每枚硬币抛出正反的概率相同。定义 A 为事件“第一枚抛出正面”， B 为“第二枚抛出正面”， C 为“两枚硬币抛掷结果相同”。

7.1. 求 A 、 B 、 C 的概率。

7.2. 求 $A \cap B$ 、 $A \cap C$ 、 $B \cap C$ 的概率。

7.3. A, B 是否相互独立？ B, C 是否相互独立？ A, C 是否相互独立？ A, B, C 是否相互独立？

5.4 大数定律*

我们做这样一个复合实验：取同一个骰子，投掷 100 次，每次为一次单一实验。记录每次朝上的点数作，按其 10 倍给出收益，作为结果。我们假定投掷结果是两两相互独立的事件，即前面投掷的结果不影响后面投掷的结果，反之亦然。我们还假定每次投掷的实验条件都是相同的，忽略投掷姿势、高度等差别。在这样的假定下，我们说，这 100 次投掷是 100 次**独立重复实验**。

独立重复实验是寻找随机事件规律的常用手段。比如，我们对投掷这枚骰子时各面朝上的概率一无所知，只有一份 100 次独立重复的投掷实验的结果。这时，如果要讨论下一次投掷的结果，我们如何给出合理的预测呢？

对于这 100 次独立重复实验，我们可以定义随机变量 $f_1, f_2, \dots, f_{100}$ 来表示各次实验。由于我们假设这些随机变量相互独立，而且遵循相同的分布，我们说这 100 个随机变量是**独立同分布**的。

对于独立同分布的一组随机变量，我们有以下的定理：

定理 5.4.1. 大数定律 设一组随机变量 $f_1, f_2, \dots, f_N$ 相互独立，且都遵循同

一个分布，它们的期望同为实数 u ，那么 N 越大，它们的平均数：

$$\frac{1}{N} (f_1 + f_2 + \cdots + f_N)$$

就几乎总会越来越接近 u 。

大数定律是长久以来人们观察得出的一系列结论的总称，表示事情重复发生的数量足够多的时候，就会呈现一定的规律。后来人们找到了合适的数学语言来描述这些定律，发现大数定律是一类数学定理。大数定律的证明较为复杂，这里我们不作证明，只给出其中一个结论。

运用大数定律，我们可以为独立重复实验的结果给出什么结论呢？

大数定律建立了沟通实验结果平均数和随机变量期望的桥梁。已知独立重复实验的结果，那么对结果求平均数，就能估计出随机变量的期望。而随机变量的期望，可以用来估计下一次实验的结果。

以上面投掷骰子的实验为例。设 100 次投掷实验的结果为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{100}$ 。它们分别是 100 个独立同分布的随机变量 $f_1, f_2, \cdots, f_{100}$ 的值。设下一次投掷实验的收益用独立同分布的随机变量 f 表示。根据大数定律，平均数

$$\bar{Y}_{100} = \frac{1}{100} (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100})$$

接近 f 的期望。因此，我们可以用 $\bar{Y}_{100}$ 代表 f 的期望。比如，如果算得 $\bar{Y}_{100} = 34.4$ ，那么可以估计下一次投掷实验的预期收益是 34.4。

再来看掷硬币实验，它对应的随机变量 h 将正面朝上映射到 1，反面朝上映射到 0。已知正反面朝上的概率 $p_{\text{正}}$ 和 $p_{\text{反}}$ ，可以算得 h 的期望为：

$$\mathbb{E}(h) = 1 \cdot p_{\text{正}} + 0 \cdot p_{\text{反}} = p_{\text{正}}.$$

所以， h 的期望就是 $p_{\text{正}}$ 。因此，如果投掷 1000 次硬币，其中 487 次正面朝上，那么 h 的期望就接近于 $\frac{487}{1000} = 0.487$ 。于是我们可以估计 $p_{\text{正}} = 0.487$ 。再掷一次硬币，正面朝上的概率是 48.7%。

这个实验中，我们用随机变量 h “揭示”了概率 $p_{\text{正}}$ 的性质，我们把这样设计的随机变量称为 ($p_{\text{正}}$ 的) **示性随机变量**。“示性”这个词，我们将在不少地方碰到，指用来揭示某些对象性质的数学工具。

从掷硬币实验的例子，还可以得到估计某事件概率的方法。如果能够作独立重复实验来观察事件 A 是否发生，那么我们把 n 次独立重复实验中事件 A 发生的次数与试验次数 n 的比值称为该实验中 A 的**频率**，记为 q_A ：

$$q_A = \frac{\text{事件}A\text{发生的次数}}{\text{总试验次数}}.$$

考虑把“事件 A 发生”映射到 1，把“ A 不发生”映射到 0 的示性随机变量 f_A ，那么频率 q_A 就是 n 个与 f_A 同分布的独立随机变量的平均数。根据大数定律， n 很大的时候， q_A 就接近 f_A 的期望，也就是 $\mathbb{P}(A)$ 。于是，通过记录多次实验中事件的频率，我们就可以估计事件发生的概率。

思考 5.4.1.

1. 投掷一枚骰子，如果朝上的点数为 i ，则将 $(2i - 7)^2$ 作为结果。如果某骰子 1 向上的概率为 50%，其余点数朝上概率为 10%；另一枚骰子 6 向上的概率为 50%，其余点数朝上概率为 10%。设第一枚骰子的结果为随机变量 g_1 ，第二枚为 g_2 ，这两个随机变量是否同分布？

2. 大数定律说明，独立重复实验次数足够多时，随机变量的期望可以用结果的平均数来估计。那么，独立重复实验次数足够多时，随机变量的方差能否用结果来估计呢？你有什么想法？

习题 5.4.1.

1. 将一枚硬币重复抛掷 200 次，其中 104 次正面向上。如何估计下一次抛掷时正面向上的概率？

2. 将一枚骰子重复抛掷 1000 次，统计每次正面朝上的点数为结果。统计发现有 169 次 1 点、142 次 2 点、182 次 3 点、163 次 4 点、170 次 5 点、174 次 6 点。

2.1. 试估计下一次抛掷时得到 5 点的概率是多少？

2.2. 试估计下一次抛掷时得到偶数点的概率是多少？

2.3. 试估计下一次抛掷时点数不超过 3 的概率是多少?

2.4. 试估计单次掷骰子结果的分布。